UNIVERSITÉ DE NANTES

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX

Année : 2009 N° B.U. :

Problèmes aux valeurs propres non-linéaires

Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes

Discipline : MATHÉMATIQUES

Présentée et soutenue publiquement par

Fatima Mohamad ABOUD

le 22 Mai 2009 à l'Université de Nantes.

Président du jury	:	Bernard HELFFER	Professeur(Université Paris Sud)
Rapporteurs	:	Alain GRIGIS	Professeur(Université Paris 13)
		Jean NOURRIGAT	Professeur(Université de Reims)
Examinateurs	:	Laurent GUILLOPÉ	Professeur(Université de Nantes)
		Georgi VODEV	C R CNRS(Université de Nantes)
Directeur de thèse	:	Didier ROBERT	Professeur(Université de Nantes)
Laboratoire	:	Laboratoire Jean Leray (UMR 6629 UN-CNRS-ECN)	

Résumé

Ce travail porte sur l'étude de familles polynomiales d'opérateurs de la forme $L(\lambda) = H_0 + \lambda H_1 + \cdots + \lambda^{m-1} H_{m-1} + \lambda^m$, où les coefficients $H_0, H_1, \cdots, H_{m-1}$ sont des opérateurs définis sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ est un paramètre. On s'intéresse au spectre de la famille $L(\lambda)$.

Le problème $L(\lambda)u(x) = 0$ est un problème aux valeurs propres non-linéaires lorsque $m \geq 2$ (Un nombre $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ est appelé valeur propre de $L(\lambda)$, s'il existe $u_0 \in \mathcal{H}$, $u_0 \neq 0$ tel que $L(\lambda_0)u_0 = 0$).

Ici nous considérons des familles quadratiques ($m = 2$) et nous nous intéressons en particulier au cas $L_P(\lambda) = -\Delta_x + (P(x) - \lambda)^2$, définie dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$, où P est un polynôme elliptique et positif de degré $M \geq 2$. Dans cet exemple les résultats connus d'existence de valeurs propres concernent les cas $n = 1$ et n paire.

L'objectif principal de ce travail est de progresser vers la preuve de la conjecture suivante, formulée par Helffer-Robert-Wang :

Pour toute dimension n, pour tout $M \geq 2$, le spectre de L_P est non vide.

Nous prouvons cette conjecture dans les cas suivants :

- $n = 1, 3$, pour tout polynôme P de degré $M \geq 2$.
- $n = 5$, pour tout polynôme P convexe vérifiant de plus des conditions techniques.
- $n = 7$, pour tout polynôme P convexe.

Ce résultat s'étend à des polynômes quasi-homogènes et quasi-elliptiques comme par exemple $P(x, y) = x^2 + y^4$, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, et n paire.

Nous prouvons ces résultats en calculant les coefficients d'une formule de trace semi-classique et en utilisant le théorème de Lidskii.

Abstract

In this work we study the polynomial family of operators $L(\lambda) = H_0+\lambda H_1+\cdots+\lambda^{m-1}H_{m-1}+\lambda^m$, where the coefficients $H_0, H_1, \cdots, H_{m-1}$ are operators defined on the Hilbert space $\mathcal{H}$ and λ is a complex parameter. We are interested to study the spectrum of the family $L(\lambda)$.

The problem $L(\lambda)u(x) = 0$, is called a non-linear eigenvalue problem for $m \geq 2$ (The number $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ is called an eigenvalue of $L(\lambda)$, if there exists $u_0 \in \mathcal{H}$, $u_0 \neq 0$ such that $L(\lambda_0)u_0 = 0$).

We consider here a quadratic family ($m = 2$) and in particular we are interested in the case $L_P(\lambda) = -\Delta_x + (P(x) - \lambda)^2$, which is defined on the Hilbert space $L^2(\mathbb{R}^n)$, where P is an elliptic positive polynomial of degree $M \geq 2$. For this example results for existence of eigenvalues are known for $n = 1$ and n is even.

The main goal of our work is to check the following conjecture, stated by Helffer-Robert-Wang :

For every dimension n, for every $M \geq 2$, the spectrum of L_P is non empty.

We prouve this conjecture for the following cases :

- $n = 1, 3$, for every polynomial P of degree $M \geq 2$.
- $n = 5$, for every convex polynomial P satisfying some technical conditions.
- $n = 7$, for every convex polynomial P.

This result extends to the case of quasi-homogeneous polynomial and quasi-elliptic, for example $P(x, y) = x^2 + y^4$, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, and n is even.

We prove this results by computing the coefficients of a semi-classical trace formula and by using the theorem of Lidskii.

Mots clés : valeur propre, opérateurs non-autoajoints, spectre non-linéaire, traces, asymptotique semi-classique.

Table des matières

Introduction générale

On considère la famille suivante d'opérateurs :

$$L(\lambda) = H_0 + \lambda H_1 + \cdots + \lambda^{m-1} H_{m-1} + \lambda^m H_m, \tag{1}$$

où les coefficients $H_0, H_1, ..., H_m$ sont des opérateurs définis sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ est un paramètre. L'origine de ce genre d'opérateurs dépendant polynomialement d'un paramètre complexe λ, est l'équation différentielle suivante ([19]) :

$$H_0\varphi(t) + H_1\varphi'(t) + \cdots + \varphi^{(m)}(t)H_m = 0, \tag{2}$$

où φ est une fonction inconnue sur $0 \leq t < \infty$ à valeur dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Cherchons les solutions stationnaires de (2), i.e. les solutions $\phi(t) = e^{\lambda t}u$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $u \neq 0$ d'où $L(\lambda)u = 0$, donc le lien entre (2) et (1) est claire.

Pour $m = 1$, la famille $L(\lambda)$ est linéaire et le problème spectral est un problème de valeurs propres linéaires, i.e lorsque $m = 1$ et $H_1 = 1$, on étudie le spectre de H_0.

Pour $m \geq 2$, cette famille est non-linéaire et le problème spectral est un problème de valeurs propres non-linéaires, dans ce cas on appelera spectre de la famille d'opérateurs $L(\lambda)$, l'ensemble des nombres complexes λ tels que $L(\lambda)$ n'est pas inversible.

Une solution élémentaire de (2) est une solution de la forme

$$\varphi(t) = e^{\lambda_0 t}\left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!} t^i u_{k-1-i}\right), \tag{3}$$

avec $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ et les vecteurs $u_0, \cdots, u_{k-1}$ appartenant à $\mathcal{H}$.

Si $\mathcal{H} = \mathbb{C}^m$ et si H_m est inversible, alors toute solution de (2) est une combinaison linéaire de solutions élémentaires.

Suivant Krein-Langer [21] nous allons expliquer comment des familles quadratiques d'opérateurs interviennent en mécanique de solide. L'origine de cette famille quadratique d'opérateurs est l'équation linéaire des petites oscillations d'un solide S en présence de frottement, qui a la forme

$$H_0\varphi + H_1\varphi' + H_2\varphi'' = 0, \tag{4}$$

où $\varphi \in \mathcal{H}$ est le déplacement d'un système à partir d'une position d'équilibre. H_0 et H_2 sont des opérateurs positifs et H_1 est un opérateur non négatif sur $\mathcal{H}$. De plus H_2, H_0, H_1 sont engendrés respectivement par l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du solide et par la fonction de dissipation de Reyleigh (la fonction de dissipation de Reyleigh est une forme définie positive, qui est quadratique dans les dérivés par rapport au temps).

Pour un solide de nombre fini de point, la forme $(H_0\varphi, \varphi)$ désigne l'énergie potentielle pour le déplacement φ. Dans ce cas H_0 a un inverse borné H_0^{-1} et cet inverse est un opérateur compact.

Dans le cas d'un ressort avec des conditions aux limites en $x = 0$ et $x = l$, on déduit les expressions formelles pour les formes $H_0[f, f]$, $H_1[f, f]$, $H_2[f, f]$ sur l'espace de Hilbert $L^2(0, l)$ (on ne définit pas le domaine exacte de ces formes). Ce domaine dépend des conditions géométriques et cinétiques aux extrêmes du solide. Alors on a

$$H_0[f, f] = \tau \int_0^l |\frac{\partial f}{\partial x}|^2 dx,$$

$$H_1[f, f] = \gamma \int_0^l |f|^2 dx,$$

$$H_2[f, f] = \int_0^l p(x)|f|^2 dx,$$

où τ est la tension dans le ressort, γ est un coefficient de frottement visqueux, et $p(x)$ est la fonction de distribution de masse le long du ressort.

Un autre exemple d'une famille quadratique est l'exemple des équations des ondes amorties, étudié par Lebeau [22]. Soient (M, g) une variété $\mathcal{C}^\infty$ riemanienne compacte, connexe, à bord $\mathcal{C}^\infty$ désigné par ∂M, $\Delta = \Delta_g$ le Laplacien sur M pour la métrique g, et $a(x) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M}, \mathbb{R}_+)$, on a le problème d'évolution suivant :

$$\begin{array}{ll} (\partial_t^2 - \Delta + 2a(x)\partial_t)u = 0 & u|_{\mathbb{R}_t \times \partial M} \equiv 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \in \mathcal{H}_0^1(M) & \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1 \in \mathsf{L}^2(M) \end{array}$$

ce problème admet une solution unique $u(x,t) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_t, \mathcal{H}_0^1) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_t, \mathsf{L}^2)$, cette solution est obtenue en étudiant l'opérateur de linéarisation, $\mathcal{A}_a$, associé à ce problème, qui est un opérateur non-borné sur l'espace de Hilbert $H = \mathcal{H}_0^1(M) \oplus \mathsf{L}^2(M)$ du domaine $D(\mathcal{A}_a) = (\mathcal{H}_0^1 \cap \mathcal{H}^2) \oplus \mathcal{H}_0^1$ tel que :

$$\mathcal{A}_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & -2a \end{pmatrix}.$$

L'une des méthodes utilisées dans l'étude du spectre d'une famille polynomiale d'opérateurs est la linéarisation, qui consiste à associer au problème de valeurs propres non-linéaire un problème linéaire avec un opérateur matriciel, ou tout simplement de réduire l'équation différentielle d'ordre m à un système de m équations différentielles linéaires d'ordre 1.

L'existence de valeurs propres pour des familles polynomiales d'opérateurs est un problème non trivial car il se ramène à l'étude du spectre usuel pour un **opérateur non auto-adjoint**.

Il est facile de trouver des exemples d'opérateurs non-bornés à résolvante compacte, sans valeurs propres. On considère l'opérateur

$$A_0 = \frac{1}{2i}\frac{d}{dx}$$

de domaine

$$D(A_0) = \{u \in \mathsf{L}^2(]0,1[), u' \in \mathsf{L}^2(]0,1[), u(0) = 0\}$$

A_0^{-1} est compacte et A_0 n'a pas de valeurs propres. Son inverse est donné par :

$$A_0^{-1} = i \int_0^x u(y)dy.$$

Bien sûr si H_0 est un opérateur autoadjoint à résolvante compacte, on sait que :

$$L(\lambda) = H_0 + \lambda,$$

possède une base orthonormée de vecteurs propres.

Dans le cas d'une famille quadratique d'opérateurs i.e.

$$L(\lambda) = H_0 + \lambda H_1 + \lambda^2,$$

il est possible que même si H_0, H_1 sont des opérateurs autoadjoints compacts, $L(\lambda)$ n'ait pas des valeurs propres. En effet si

$$H_0 = A_0 A_0^* \,, \quad H_1 = -(A_0 + A_0^*),$$

entraîne que si pour $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $L(\lambda)u = 0$ alors $u = 0$, i.e. cet opérateur n'admet pas de solution non-nulle (on prouvera cela plus loin).

Voici un autre exemple :

$$L(\lambda) = -\frac{d^2}{dx^2} + (x - \lambda)^2.$$

Ici $H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$, $H_1 = -2x$. $L(\lambda)$ est une famille quadratique d'opérateurs non-bornés dans $\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ de domaine

$$D(L(\lambda)) = \Big\{ u \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}), x^2 u \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}), \frac{d^2 u}{dx^2} \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}) \Big\}.$$

Pour cette famille aussi on n'a pas de solution non-nulle (on prouvera cela plus loin).

Les exemples précédents montrent que l'existence de valeurs propres pour des familles polynomiales d'opérateurs peut être un problème difficile.

En 1980, Pham The Lai et Didier Robert [25], ont étudié l'existence de valeurs propres pour la famille d'opérateurs (1), sous certaines hypothèses de régularité sur $H_0, H_1, ..., H_m$. Ils ont ensuite déterminé les secteurs du plan complexe dans lesquels l'opérateur $L(\lambda)$ a des valeurs propres. Ils ont aussi appliqué ces résultats pour le cas $n = 1$, en étudiant l'opérateur :

$$L_P(\lambda) = D_t^2 + (\lambda - P(t))^2, t \in \mathbb{R} \tag{5}$$

où $D_t = -i\frac{d}{dt}$, P est le polynôme elliptique positif défini par :

$$P(t) = t^2.$$

Le travail de Pham et Robert est l'un des premiers sur ce sujet. La méthode utilisée s'applique essentiellement au cas $n = 1$, pour une raison qui sera expliquée plus loin.

L'étude de ce genre des problème a commencé par une question posée par B. Helffer à Pham The Lai et D.Robert plus de trente ans passés, cette question concerne l'existence d'une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ et d'un vecteur propre $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $u \neq 0$, tel que $L(\lambda)u = 0$, pour la famille :

$$L(\lambda) = D_t^2 + (t^2 - \lambda)^2, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

L'étude de la famille (6) est liée à l'étude de l'hypoellipticité analytique pour des opérateurs comme A tel que

$$A = \sum_{j=1}^{r} X_j^2,$$

où $X_1, \cdots, X_r$ sont des champs de vecteurs analytiques définis dans un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et qui vérifie la condition de H ?rmander :

il existe un entier N tel que les crochets itéré du champ de vecteurs X_j de longeur inférieure à N, engendrent un algébre de Lie de dimension N en chaque point.

On rappelle que l'opérateur A est $\mathcal{C}^\infty$-hypoelliptique, si pour tout ω et toute distrubution u tels que Au est $\mathcal{C}^\infty$ dans l'ensemble ouvert ω, alors u est aussi $\mathcal{C}^\infty$

dans l'ensemble ouvert ω.

Le problème de l'hypoellipticité analytique est donné par : lorsque les coefficients de X_j sont analytique-réels dans ω, et que X_j vérifient la condition de H ?rmander, et Au est analytique-réel dans ω. Est ce que u est analytique-réel dans ω ?

En général, la réponse de cette question est négative comme celà a été montré dans [4], [11], [25], [26].

Dans 2002, Chanillo, Helffer et Laptev [8] ont considéré le cas de la dimension n quelconque pour les opérateurs du type :

$$L_P(\lambda) = -\Delta + (\lambda - P(x))^2, x \in \mathbb{R}^n,$$

où Δ est l'opérateur de Laplace et P est un polynôme elliptique positif.

L_P s'écrit sous la forme :

$$L_P(\lambda) = L - 2\lambda M + \lambda^2, \tag{7}$$

où $L = -\Delta + P(x)^2$ et $M = P(x)$. L'opérateur L est inversible et son inverse est un opérateur pseudodifférentiel. Soit l'opérateur :

$$A := L^{-1}.$$

Les conditions suffisantes d'appartenance de A à une classe de Schatten connue sont alors faciles à trouver en utilisant la théorie des opérateurs pseudodifférentiels. La famille d'opérateurs $L_P(x, D_x, \lambda)$ se réduit alors à l'analyse du spectre du problème suivant :

$$(\mathbb{I} - 2\lambda B + \lambda^2 A)u = 0 \tag{8}$$

où $B = A^{\frac{1}{2}} P A^{\frac{1}{2}}$.

Pour étudier l'existence des solutions, les auteurs ont utilisé une méthode basée sur des inégalités de traces et ont ensuite appliqué le théorème de Lidskii pour prouver l'existence de solutions non triviales. Dans ce travail Chanillo, Helffer et

Laptev ont donné des résultats précis pour les cas $n \leq 3$, $m \geq 6$.

En 2003, Helffer, Robert et Wang ont retrouvé et généralisé les résultats de Chanillo, Helffer et Laptev en utilisant l'analyse semi-classique et ont prouvé l'existence de valeurs propres en toute dimension paire.

En 2004, Robert [27] a également considéré la famille d'opérateurs différentiels étudiée dans [15] :

$$L_P(\lambda) = -\Delta + (P(x) - \lambda)^2, \tag{9}$$

où P est un polyôme de degré $m \geq 2$ tel que sa partie homogène P_m vérifie $P_m > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (i.e. P est un polynôme elliptique positif). Dans ce travail Robert a développé les résultats de Helffer, Robert et Wang [15]. Il a en plus prouvé l'existence d'un nombre infini de valeurs propres pour cette famille d'opérateurs (pour la dimension paire).

Le problème pour le cas n impair, $n \geq 3$ reste non résolu dans ce contexte, ce qui fait l'objet principal de notre étude. Dans le cadre de ce travail, nous allons étudier également quelques exemples d'opérateurs dans les cas quasi-homogènes, polyhomogènes et elliptiques.

Dans **le premier chapitre** on définit précisément les familles polynomiales d'opérateurs (1). Ensuite on étudie en détail l'analyse fonctionnelle du problème.

Dans l'analyse fonctionnelle on introduit des hypothèses sur $H_0, \cdots, H_m$ qui sont des conditions suffisantes pour l'existence des solutions non nulles.

Dans **le deuxième chapitre** on traite l'existence de solutions pour des problèmes des valeurs propres non linéaires par des techniques complexes et pseudo-différentielles.

L'analyse complexe intervient principalement par le principe de Phragmén-Lindel ?f, ce principe est une généralisation du principe de maximum.

Dans l'analyse différentielle nous étudions les rayons de croissance minimale pour des familles quadratiques. Les rayons de croissance minimale divisent le plan complexe dans des zones. Nous étudions des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une demi-droite soit un rayon de croissance minimale. On en déduit des zones dans lesquelles les valeurs propres se trouvent.

Nous traitons aussi quelques difficultés rencontrées dans l'application du principe de Phragmén-Lindel ?f, et puis nous donnons quelques résultats permettant d'appliquer ce principe pour des familles quadratiques d'opérateurs homogènes.

Dans **le troisième chapitre** nous étudions la méthode de traces qui est l'une des méthodes utilisées pour prouver l'existence de valeurs propres non-linéaires.

Nous présentons en particulier la méthode de Chanillo-Helffer-Laptev, nous étudions cette méthode en donnant différentes formules des critères de Chanillo-Helffer-Laptev, et puis nous utilisons ces critères pour des exemples dans les cas $n = 1, 2$.

Dans **le quatrième chapitre** nous traitons les estimations d'erreurs dans les calculs des paramétrix des familles quadratiques d'opérateurs et les systèmes non-autoajoint associés à ces familles.

Dans **le cinquième chapitre** nous étudions des familles d'opérateurs quadratiques semi-classiques et quasi-homogènes.
Pour traiter le cas quasi-homogène nous transforons le problème en un problème semi-classique. Nous présentons les résultats de Helffer-Robert-Wang [15] et Robert [27], de plus nous étudions des familles d'opérateurs avec petits paramètres. Ensuite, nous étudions les familles d'opérateurs quadratiques quasi-homogènes suivantes :

$$L_P(\lambda) = -\Delta + (P(x) - \lambda)^2 \ , \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où P est un polynôme quasi-homogène d'ordre M et de type $(k_1, \cdots, k_n)$, n pair. Comme application nous donnons un exemple dans le cas $n = 2$.

Pour prouver l'existence de solutions non nulles, nous utilisons la même technique que Helffer-Robert-Wang [15] et Robert [27] et en utilisant le théorème de Lidskii.

Pour le cas n quelconque, nous traitons des familles d'opérateurs quadratiques du type d'homogénéité $(\frac{k_1}{M}, \frac{k_2}{M}, \frac{2\ell_1}{M'}, \frac{2\ell_2}{M'})$. Pour ces familles nous étudions les conditions qui permettent de prouver l'existence de valeurs propres.

Dans **le sixième chapitre** nous abordons l'étude de la question laissée ouverte dans le travail de Helffer-Robert-Wang :

Le problème $L_P(\lambda)$ a-t-il des solutions non triviales pour toute dimensions $n \geq 3$, impaire et P un polynôme elliptique ?

Nous prouvons l'existence de solutions pour des problèmes aux valeurs propres non-linéaires pour ces familles quadratiques d'opérateurs dans les cas $n = 1, 3, 5$ et 7 en prouvant l'existence de solutions pour le problèmes linéarisé associé à cette famille quadratique. Pour la famille quadratique d'opérateurs

$$\hat{L}(\lambda) = \widehat{H}_0 + \lambda \widehat{H}_1 + \lambda^2, \tag{10}$$

où $\widehat{H}_0$ et $\widehat{H}_1$ sont des opérateurs pseudodifférentiels avec des symboles $H_0(x, \xi)$ et $H_1(x, \xi)$, respectivement, qui vérifient certaines hypothèses. On associe à $\widehat{L}(\lambda)$ la famille d'opérateurs matriciels $\widehat{\mathcal{A}_L}$ tels que :

$$\widehat{\mathcal{A}_L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\hat{H}_0 & -\hat{H}_1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Pour le cas $n = 5, 7$ nous calculons les coefficients de la formule asymptotique suivante pour la trace de $f(\widehat{\mathcal{A}_L})$,

$$Tr(f(\widehat{\mathcal{A}_L})) \asymp \sum_{j \geq 0} C_{2j}^{(n)}(f) \hbar^{2j-n},$$

pour une fonction f holomorphe dans Λ telle que :

$$|f(\tau)| \leq C(1 + |\tau|)^{-k}, \ \forall \tau \in \Lambda.$$

Pour $n = 1, 3$ on a

$$C_0^{(1)}(f) = C_0^{(3)}(f) = 0,$$

et

$$C_2^{(1)}(f) \neq 0 \quad et \quad C_2^{(3)}(f) \neq 0.$$

Pour $n = 5, 7$, pour des cas particuliers de polynômes P, on montre également

$$C_4^{(5)}(f) \neq 0 \; et \; C_4^{(7)}(f) \neq 0.$$

Ces deux coefficients sont difficiles à calculer explicitement. Leur expression fait apparaitre des sommes contenant beaucoup des termes de signes variables. Des calculs numériques confirment ce résultat pour des cas particuliers de polynômes. On montre plus généralement que pour tout entier impair n on a

$$C_{2j}^{(n)}(f) = 0 \quad pour \; n \geq 4j + 1$$

Ceci nous conduit à énoncer la conjecture suivante : *Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$, il existe f vérifie (6.1.2) tel que* :

$$C_{2j}^{(4j-1)}(f) \neq 0, \quad \text{et} \quad C_{2j}^{(4j-3)}(f) \neq 0. \tag{12}$$

Ce que l'on peut encore écrire sous la forme :

$$C_{2[\frac{n+1}{4}]}^{(n)}(f) \neq 0, \quad \text{et} \quad C_{2[\frac{n+3}{4}]}^{(n)}(f) \neq 0. \tag{13}$$

Ensuite, nous étudions la famille d'opérateurs quadratiques $L_P(\lambda)$ avec P un polynôme elliptique en prouvant les mêmes résultats que précédemment.

Dans **le septième chapitre** nous donnons des estimations sur le nombre de valeurs propres dans des disques, cela permet en particulier de prouver l'existence d'un nombre infini de valeurs propres.

1

Introduction aux problèmes aux valeurs propres non-linéaires

Sommaire

On commence par définir la famille polynomiale d'opérateurs, de la forme suivante :

$$L(\lambda) = H_0 + \lambda H_1 + \cdots + \lambda^{m-1} H_{m-1} + \lambda^m H_m,$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ est un paramètre et $H_0, \cdots, H_m$ sont des opérateurs définis sur un espace de Hilbert. Si $m = 2$, la famille L est dite quadratique. Dans la première partie nous traitons les familles polynomiales d'opérateurs à coefficients bornés, puis à coefficients compacts et ensuite à coefficients non-bornés. En général on associe à une famille polynomiale d'opérateurs (qui représente un problème de valeurs propres non-linéaires), une famille d'opérateur matriciels qui présente la linéarisation de cette famille polynomiale. Ces deux familles ont même spectre. Cette coïncidence des spectres donne la possibilité de prouver l'existence des solutions pour une famille en prouvant l'existence de solutions pour l'autre.

Dans la suite nous allons présenter le cadre d'analyse fonctionnelle permettent de traiter les problèmes de familles polynomiales.

L'analyse fonctionnelle consiste ici à déterminer les hypothèses sur les opérateurs $H_0, \cdots, H_m$ qui vont nous permettre d'étudier l'existence de solutions.

1.1 Préliminaires

1.1.1 Familles polynomiales d'opérateurs à coefficients bornés

Dans cette section, on étudie des familles polynomiales d'opérateurs à coefficients bornés ainsi que la linéarisation de ces familles. Ensuite, on donne quelques résultats concernant la relation entre le spectre de ces familles et le spectre de l'opérateur de linéarisation. Enfin, on traite des familles polynomiales d'opérateurs à coefficients compacts.

On considère la famille suivante :

$$B(\lambda) = B_0 + \lambda B_1 + \cdots + \lambda^{m-1} B_{m-1} + \lambda^m B_m, \tag{1.1}$$

où $B_0, \cdots, B_m$ sont des opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, tels que $m \geq 1$ et $B_m \neq 0$. Notons que, lorsque $m = 1$, $B(\lambda)$ est une famille linéaire et lorsque $m = 2$, $B(\lambda)$ est une famille quadratique.

L'origine de ces familles polynomiales d'opérateurs est l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} B_0\varphi(t) + B_1\varphi'(t) + \cdots + B_m\varphi^{(m)}(t) &= 0 \\ \varphi^{(j)}(0) &= u_j \,, \quad j = 0, \cdots, m-1 \end{aligned} \tag{1.2}$$

où les coefficients $B_0, B_1, ..., B_m$ sont des opérateurs définis dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, φ est une fonction inconnue sur $0 \leq t < \infty$ à valeurs dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et les données initiales $\{u_j\}_{j=0}^{m-1}$ sont des vecteurs de $\mathcal{H}$.

Ce type d'équation est utilisé par M. V. Keldys [19] pour voir si un système de vecteurs est m-total pour les fonctions vectorielles $\varphi(t)$ à valeurs dans $\mathcal{H}$ (voir la définition 1.1.4 d'un système m-total). Pour le cas d'un espace de dimension finie, la théorie générale des équations différentielles de type (1.2) est fondée sur la théorie des familles polynomiales d'opérateurs de la forme (1.1).

Définition 1.1.1. *Soit $B(\lambda)$ une fonction à valeur opérateur (dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$) holomorphe dans un certain ouvert U de $\mathbb{C}$. Le spectre de cette fonction est défini comme étant l'ensemble des nombres complexes dans U pour lesquels cette fonction n'admet pas d'inverse dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

Notre étude consiste à prouver l'existence de valeurs propres pour certaines familles polynomiales d'opérateurs. On définit tout d'abord les valeurs propres et les vecteurs propres pour des familles polynomiales.

Définition 1.1.2. *Un nombre $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ est appelé une valeur propre de $B(\lambda)$, s'il existe $u_0 \in \mathcal{H}$, $u_0 \neq 0$ tel que :*

$$B(\lambda_0)u_0 = 0,$$

u_0 est alors un vecteur propre de $B(\lambda)$ correspondant à λ_0.

Pour linéarisation de cette famille, on définit une matrice $m \times m$, notée par $\mathcal{A}_B$, qui est définie sur $\mathcal{H}^m$ ($\mathcal{H}^m$ est la somme hilbertienne de m copies de $\mathcal{H}$), telle que :

$$\mathcal{A}_B = \mathcal{A}_0 - \lambda\mathcal{A}_1,$$

où

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & \cdots & B_{m-1} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & B_m \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

sont des opérateurs matriciels dont les coefficients non indiqués sont des zéros. Le lemme suivant nous donne une relation entre la famille polynomiale $B(\lambda)$ et la famille linéaire d'opérateurs matriciels $\mathcal{A}_B(\lambda)$. La preuve est obtenue directement par l'application du produit de matrices.

Lemme 1.1.1. *La famille d'opérateurs matriciels $\mathcal{A}_B(\lambda)$ peut s'écrire sous la forme*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{B}}(\lambda) = \mathcal{C}(\lambda) diag(B(\lambda), 1, \cdots, 1)\mathcal{D}(\lambda),$$

où

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i=1}^m \lambda^{i-1} B_i & \sum_{i=1}^m \lambda^{i-2} B_i & \cdots & B_{m-1} + \lambda B_m \\ & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

et $diag(B(\lambda), 1, \cdots, 1)$ est l'opérateur matriciel diagonal de diagonale principale $(B(\lambda), 1, \cdots, 1)$

Notons que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont inversibles d'inverses suivants :

$$\mathcal{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\sum_{i=1}^{m} \lambda^{i-1} B_i & -\sum_{i=1}^{m} \lambda^{i-2} B_i & \cdots & -(B_{m-1} + \lambda B_m) \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \lambda & 1 & & & \\ \lambda^2 & \lambda & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \lambda^{m-1} & \cdots & \lambda^2 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans le résultat suivant, on montre que les spectres de la famille polynomiale et de son opérateur de linéarisation coïncident.

Lemme 1.1.2. *Pour la famille polynomiale $B(\lambda)$ et la famille matricielle de linéarisation $\mathcal{A}_B(\lambda)$ on a*
i) Les spectres de $B(\lambda)$ et $\mathcal{A}_B(\lambda)$ coïncident.
ii) Si l'opérateur B_m est inversible, alors le spectre de la famille polynomiale $B(\lambda)$ coïncide avec le spectre de l'opérateur $\mathcal{A}_1^{-1}\mathcal{A}_0$. De plus ce spectre est un ensemble compact et non vide.
iii) Si l'opérateur B_0 est inversible, alors le spectre de la famille polynomiale $B(\lambda)$ coïncide avec l'ensemble de tous les nombres de la forme λ^{-1}, où $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_0^{-1}\mathcal{A}_1)$ et $\sigma(\mathcal{A}_0^{-1}\mathcal{A}_1)$ désigne le spectre de l'opérateur $\mathcal{A}_0^{-1}\mathcal{A}_1$.

Preuve :

i) On suppose $\lambda_0 \notin \sigma(B(\lambda))$, alors $B(\lambda_0)$ est inversible. D'après le lemme (1.1.1) et du fait que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont inversibles on obtient que $\mathcal{A}_B(\lambda_0)$ est inversible, d'où $\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{A}_B(\lambda))$. De même on obtient la réciproque.

ii) On suppose que B_m est inversible, alors l'opérateur $\mathcal{A}_1$ est aussi inversible. Donc $\mathcal{A}_B(\lambda)$ est inversible si et seulement si

$$\mathcal{A}_1^{-1}\mathcal{A}(\lambda) = \mathcal{A}_1^{-1}\mathcal{A}_0 - \lambda$$

est inversible, i.e., si et seulement si $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_1^{-1}\mathcal{A}_0)$ ce qui achève la démonstration. La preuve de (iii) est analogue à celle de (ii). □

En fait, si $B_m = 1$ (1 est l'opérateur identité), alors $\mathcal{A}_1$ est inversible, et on considère alors $\mathcal{A}_B = \mathcal{A}_1^{-1}\mathcal{A}_0$, qui a la forme suivante :

$$\mathcal{A}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -B_0 & -B_1 & -B_2 & \cdots & -B_{m-1} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Dans notre étude on utilise toujours cet opérateur matriciel pour la linéarisation car on considère des familles polynomiales d'opérateurs avec $B_m = 1$.

On étudie maintenant la relation entre les vecteurs propres correspondant à la même valeur propre de $B(\lambda)$ et $\mathcal{A}_B(\lambda)$. On commence par donner la définition suivante.

Définition 1.1.3. *Soit u_0 un vecteur propre de la famille $B(\lambda)$ correspondant à la valeur propre λ_0. On dit que les vecteurs $u_1, \cdots, u_{k-1}$ sont des vecteurs associés au vecteur propre u_0 si*

$$\sum_{j=0}^{i} \frac{1}{j!} \frac{d^j B(\lambda_0)}{d\lambda_0^j} u_{j-i} = 0 \ , \quad i = 1, \cdots, k-1,$$

le nombre k désigne la longueur de la chaîne $u_0, \cdots, u_{k-1}$, de vecteur propre et vecteurs associés. La valeur maximale de la longueur d'une chaîne de vecteur propre et vecteurs associés est appelée la multiplicité du vecteur propre u_0, et on la désigne par $k(u_0)$.

Remarque 1.1.1. *Si le sous-espace $Ker(B(\lambda))$ est de dimension finie d et la longueur $k(u_0)$ est finie pour chaque $u_0 \in Ker(B(\lambda))$ ($u_0 \neq 0$), alors*
1) un système canonique de vecteurs propres et vecteurs associés de $B(\lambda)$ correspondant à la valeur propre λ_0 est donné par :

$$u_0^{(i)}, \cdots, u_0^{(i)}, \quad i = 1, \cdots, d$$

où les vecteurs $\{u_0^{(i)}\}_{i=1}^d$ forment une base dans $Ker(B(\lambda))$,
2) $k(u_0^{(i)}) = k_i$,
3) l'ensemble des vecteurs $u_1^{(i)}, \cdots, u_{k_i-1}^{(i)}$ est une chaîne de vecteurs associés à $u_0^{(i)}$,
4) on a

$$k_1 = \max_{0 \neq u \in KerB(\lambda_0)} k(u), \quad k_i = \max_{0 \neq u \in \mathfrak{M}_i} k(u),$$

où $i > 1$ et $\mathfrak{M}_i$ est un complément dans $KerB(\lambda_0)$ d'un sous-espace engendré par $u_0^{(1)}, \cdots, u_0^{(i-1)}$.
5) Le nombre

$$k(\lambda_0, B(\lambda)) = \sum_{i=1}^{d} k_i$$

désigne la multiplicité de la valeur propre λ_0 de $B(\lambda)$.

On peut définir maintenant le système m-total.

Définition 1.1.4. *On dit que le système des vecteurs propres et vecteurs associés est m-total si la réunion de tous les systèmes de la forme $\{\phi_j^{(i)}\}_{i=0}^{m-1}$, $j = 1, \cdots, k$ constitue un système total dans l'espace $\tilde{\mathcal{H}}$, où $\tilde{\mathcal{H}}$ égal à la somme de m copies de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.*

On donne maintenant la définition de la chaîne de Jordan pour une famille polynomiale d'opérateurs.

Définition 1.1.5. *On appelle une suite de vecteurs non nuls, $u_0, \cdots, u_{k-1}$, une* *chaîne de Jordan de la famille d'opérateur $B(\lambda)$ correspondant au nombre λ_0, si*

$$\begin{aligned} B(\lambda_0)u_0 &= 0 \\ B(\lambda_0)u_1 + \frac{dB(\lambda_0)}{1!d\lambda_0}u_0 &= 0 \\ &\vdots \\ B(\lambda_0)u_{k-1} + \frac{dB(\lambda_0)}{1!d\lambda_0}u_{k-2} + \cdots + \frac{d^{k-1}B(\lambda_0)}{(k-1)!d\lambda_0^{k-1}}u_0 &= 0, \end{aligned}$$

Remarque 1.1.2. *Pour une famille d'opérateurs $B-\lambda$, une chaîne de vecteur propre et vecteurs associés coincïde avec la chaîne de Jordan de l'opérateur B correspondant à la même valeur propre. De plus la multiplicité d'une valeur propre λ_0 de la famille $B-\lambda$ coincïde avec la multiplicité de cette valeur propre de l'opérateur B.*

On énonce le lemme suivant dont la preuve est donnée dans [23].

Lemme 1.1.3. *Les vecteurs $u_0, \cdots, u_{k-1}$ forment une chaîne de vecteur propre et vecteurs associés de $B(\lambda)$ correspondant à λ_0 si et seulement s'il existe un polynôme à valeur vectorielle $u(\lambda)$ tel que :*

$$\begin{aligned} u(\lambda_0) &\neq 0 \\ u^{(j)}(\lambda_0) &= (j!)u_j\ , \quad j = 0, \cdots, k-1 \end{aligned}$$

et $B(\lambda)u(\lambda)$ admet un zéro de multiplicité supérieur ou égal à k en λ_0.

On rappelle maintenant la définition d'un polynôme générateur.

Remarque 1.1.3. *On suppose que $u(\lambda)$ est un polynôme à valeur vectorielle à coefficients dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, $u(\lambda_0) \neq 0$ et $B(\lambda_0)u(\lambda_0) = 0$. Si l'ordre du zéro du polynôme $B(\lambda)u(\lambda)$ en λ_0 est égal à k, alors $u(\lambda)$ est un polynôme générateur pour la chaîne, $\{(j!)^{-1}u^{(j)}(\lambda_0)\}_{j=0}^{k-1}$, de vecteur propre et vecteurs associés de $B(\lambda)$. Le nombre k désigne le rang du polynôme générateur $u(\lambda)$.*

Le lemme suivant et son corollaire nous permettent d'avoir une relation entre les vecteurs propres et les vecteurs associés à $B(\lambda)$ et $\mathcal{A}_B$.

Lemme 1.1.4. *Un polynôme à valeur vectorielle, $u(\lambda) = (u_i(\lambda))_{i=0}^{m-1}$ de coefficients appartenant à $\mathcal{H}^m$, est un polynôme générateur de rang m de la famille $\mathcal{A}_B(\lambda)$ au point λ_0 si et seulement si $u(\lambda_0)$ est un polynôme générateur de rang m pour la famille $B(\lambda)$ en λ_0 et*

$$u_i(\lambda) - \lambda u_{i-1}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m q_i(\lambda) \ , \quad i = 1, \cdots, m-1,$$

où $q_i(\lambda)$ est un polynôme à valeur vectorielle.

Corollaire 1.1.1. *Un ensemble de vecteurs*

$$u_i = (u_i^{(j)})_{j=0}^{m-1} \ , \quad i = 0, \cdots, k-1,$$

est une chaîne de vecteur propre et vecteurs associés de $\mathcal{A}_B(\lambda)$ correspondant à la valeur propre λ_0 si et seulement si $u_i^{(0)}$, $i = 0, \cdots, k-1$ est une chaîne de vecteur propre et vecteurs associés de $B(\lambda)$ correspondant à la valeur propre λ_0, et de plus

$$\begin{aligned} u_0^{(j)} &= \lambda_0 u_0^{(j-1)} \ , & j &= 0, \cdots, m-1, \\ u_i^{(j)} &= \lambda_0 u_i^{(j-1)} + u_{i-1}^{(j-1)} \ , \quad i = 0, \cdots, k-1 \ , & j &= 0, \cdots, m-1, \end{aligned}$$

On peut prouver alors le résultat suivant.

Lemme 1.1.5. *Les valeurs propres des familles $B(\lambda)$ et $\mathcal{A}_B(\lambda)$ coïncident et ont les même multiplicités.*

Preuve :

Si $u = (u_i)_{i=0}^{m-1} \in \mathcal{H}^n$, alors en utilisant le corollaire 1.1.1, on a

$$\mathcal{A}_B(\lambda_0)u = 0$$

si et seulement si

$$B(\lambda_0)u_0 = 0 \ \text{ et } \ u_i = \lambda^i u_0 \ , \quad i = 1, \cdots, m-1. \tag{1.4}$$

On a $u_0 = 0$ si et seulement si $u = 0$, donc les valeurs propres de $B(\lambda)$ et $\mathcal{A}_B(\lambda)$ coïncident et la correspondance entre u_0 et u définie dans (1.4) est un isomorphisme algébrique entre les sous-espaces $KerB(\lambda)$ et $Ker\mathcal{A}_B(\lambda)$. Grâce au corollaire 1.1.1, u et u_0 ont les mêmes multiplicités, d'où

$$k(\lambda_0, B(\lambda)) = k(\lambda_0, \mathcal{A}_B(\lambda)),$$

ce qui achève la démonstration. □

On donne quelques résultats utiles pour l'étude des familles d'opérateurs à coefficients compacts.

Lemme 1.1.6. *Soit S un opérateur inversible, alors les familles $B(\lambda)$, $SB(\lambda)$ admettent le même spectre. Les valeurs propres ainsi que leurs multiplicités sont identiques pour les deux familles.*

La preuve de ce résultat découle directement de la définition d'une valeur propre.

Lemme 1.1.7. *Soient $B(\lambda) = S - \lambda B$ et $M(\mu) = B - \mu S$. Si $u(\lambda)$ est un polynôme générateur de rang k et de degré i au point $\lambda_0 \neq 0$ pour la famille $B(\lambda)$, alors $v(\mu) = \mu^i u(\mu^{-1})$ est un polynôme générateur de rang k au point $\mu_0 = {\lambda_0}^{-1}$ pour la famille $M(\lambda)$.*

Preuve :

Soit $u(\lambda)$ un polynôme générateur de rang k et de degré i au point $\lambda_0 \neq 0$, donc il existe un vecteur polynôme $q_B(\lambda) \neq 0$ tel que :

$$(S - \lambda B)u(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k q_B(\lambda).$$

Le degré de ce polynôme est inférieur ou égal $i + 1 - k$ et de plus :

$$\begin{aligned}(B - \mu S)v(\mu) &= -\mu^{i+1}(S - \mu^{-1}B)u(\mu^{-1}) \\ &= -\mu^{i+1}(\mu^{-1} - \mu_0^{-1})q_B(\mu^{-1}) \\ &= (\mu - \mu_0)^k q_M(\mu),\end{aligned}$$

où $q_M(\mu)$ est un vecteur polynôme avec $q_M(\mu) \neq 0$. D'où le résultat. □

Lemme 1.1.8. *Soient* $B(\lambda) = S - \lambda B$, $M(\mu) = B - \mu S$ *et* $Ker(B) = Ker(M) = \{0\}$. *Le nombre* λ_0 *est une valeur propre de* $B(\lambda)$ *si et seulement si* $\mu_0 = \lambda_0^{-1}$ *est une valeur propre de* $M(\mu)$. *De plus les multiplicités de* λ_0 *et* μ_0 *coïncident.*

Preuve :

On a les égalités équivalents $B(\lambda_0)u_0 = 0$ et $M(\mu_0)u_0 = 0$. Puisque

$$Ker(B) = Ker(M) = \{0\},$$

on a $\lambda_0 \neq 0$ et $\mu_0 \neq 0$. Il résulte du lemme 1.1.7 que les multiplicités du vecteur propre u_0 coïncident pour les familles $B(\lambda)$ et $M(\mu)$. Ce qui prouve alors la deuxième partie du lemme. □

On étudie maintenant des familles polynomiales d'opérateurs à coefficients compacts.

Théorème 1.1.1. *Soit*

$$C(\lambda) = I + T_0 + T_1\lambda + \cdots + T_m\lambda^m,$$

où $T_0, \cdots, T_m$ *sont des opérateurs compacts. Si la famille* $C(\lambda)$ *admet au moins une valeur régulière, alors le spectre de* $C(\lambda)$ *se compose de valeurs propres de multiplicités finies. Le seul point d'accumulation possible de ces valeurs propres est l'infini.*

Preuve :

On peut supposer que $1 + T_0$ soit inversible. En effet, si a est un point régulier (rappelons que a est un point régulier si $C(a)$ est inversible) de $C(\lambda)$, alors

$$C(\lambda + a) = 1 + T_0' + T_1'\lambda + \cdots + T_m'\lambda^m,$$

où T_i' est un opérateur compact pour $i = 0, \cdots, m$ et $1 + T_0' = C(a)$ est un opérateur inversible. D'après le lemme 1.1.2, le spectre de $C(\lambda)$ coïncide avec le spectre de la famille matricielle $1 - \lambda\mathcal{A}$, avec

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} ST_1 & \cdots & ST_{m-1} & ST_m \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

où $S = -(1+T_0)^{-1}$. En utilisant les lemmes 1.1.2 et 1.1.6, on a alors que les valeurs propres et leurs multiplicités sont identiques pour les familles $C(\lambda)$ et $1 - \lambda\mathcal{A}$. Donc d'après le lemme 1.1.8 et la remarque 1.1.2, les valeurs propres λ de $C(\lambda)$ et les valeurs propres μ de $\mathcal{A}$ sont reliés par la relation $\mu = \lambda^{-1}$ et ont les mêmes multiplicités.

Or $\mathcal{A}$ étant compact alors le spectre de $\mathcal{A}$ se compose de valeurs propres de multiplicités finies avec zéro comme seul point d'accumulation. Ce qui achève la preuve. □

1.1.2 Familles polynomiales d'opérateurs à coefficients non-bornés

Dans cette section on étudie des familles polynomiales à coefficients non-bornés et on propose une méthode pour les réduire à des familles polynomiales à coefficients bornés.

Soient $H_0, H_1, ..., H_m$ des opérateurs non bornés dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ tels que :

$$L(\lambda) = H_0 + \lambda H_1 + \cdots + \lambda^{m-1} H_{m-1} + \lambda^m H_m. \tag{1.6}$$

Cette famille d'opérateurs est définie sur le domaine $D(L(\lambda)) = \cap_{i=0}^m D(H_i)$. Dans notre travail, on introduit certaines hypothèses sur $\{H_i\}_{i=0}^m$ pour pouvoir définir le domaine en fonction du domaine de certaines puissances de H_0.

En général, pour étudier des familles polynomiales d'opérateurs à coefficients non bornés, on les réduit à des familles polynomiales d'opérateurs à coefficients bornés, ce qui permet d'utiliser tous les résultats concernant les familles à coefficients bornés. Le résultat suivant est une méthode de réduction de la famille définie dans (1.6) en une famille à coefficients bornés.

Définition 1.1.6. *On dit que l'opérateur A est subordonné à B s'il existe un nombre C tel que pour tout $f \in \mathcal{H}$:*

$$\|A(f)\| \leq C\|B(f)\|.$$

Lemme 1.1.9. *Supposons que T soit un opérateur fermé, les opérateurs $\{H_i\}_{i=0}^m$ sont subordonnés à T, S est un opérateur borné sur $\mathcal{H}$, $Im(S) = D(T)$ et $Ker(S) = \{0\}$. Si*

$$\begin{array}{rcl} L(\lambda) & = & T + \sum_{i=0}^m \lambda^i H_i, \\ B(\lambda) & = & TS + \sum_{i=0}^m \lambda^i H_i S, \end{array}$$

alors L et B ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. De plus, l'ensemble $\{u_i\}_{i=0}^m$ est une chaîne de $L(\lambda)$ correspondant à λ_0 si et seulement si $u_i = Sv_i$, où $\{v_i\}_{i=0}^m$ est une chaîne de $B(\lambda)$ correspondant à λ_0.

Preuve :

Les coefficients de $B(\lambda)$ sont bornés. Donc, on a bien que TS est un opérateur défini partout, fermé et borné. Comme les opérateurs $\{H_i\}_{i=0}^m$ sont subordonnés à T, alors pour tout $f \in \mathcal{H}$ on a

$$\|H_i S(f)\| \leq C_i\|TS(f)\| \leq C_i'\|f\| \;, \quad i = 0, \cdots, m.$$

On suppose que $\lambda_0 \notin \sigma(B(\lambda))$, donc $B(\lambda_0)$ est inversible. Or on a $B(\lambda) = L(\lambda)S$, d'où

$$L(\lambda_0)SB(\lambda_0)^{-1} = 1.$$

Pour prouver que $\lambda_0 \notin \sigma(L(\lambda))$, i.e. $L(\lambda_0)$ est inversible, il suffit de montrer que $Ker(L(\lambda_0)) = \{0\}$.

En effet, soit $u \in Ker(L(\lambda_0))$, on a $L(\lambda_0)u = 0$. Donc $u \in D(T) = Im(S)$. D'où il existe $w \in \mathcal{H}$ tel que $u = Sw$. Il en résulte que $B(\lambda_0)w = 0$, ce qui donne $w = 0$ et donc $u = 0$. Ce qui prouve que $\lambda_0 \notin \sigma(L(\lambda))$.

Inversement, on suppose que $L(\lambda_0)$ est inversible. Soit f est un vecteur dans $\mathcal{H}$, alors il existe $u \in D(T)$, tel que $L(\lambda_0)u = f$. Comme $u \in Im(S)$, alors il existe $w \in \mathcal{H}$ tel que $u = Sw$ et $B(\lambda_0)w = f$. Donc $Im(B(\lambda_0)) = \mathcal{H}$.

Si $B(\lambda_0)v = 0$, alors $L(\lambda_0)Sv = 0$ et $Sv = 0$ (parce que $L(\lambda_0)$ est inversible), donc $v = 0$. Par conséquent $B(\lambda_0)$ est inversible. Ce qui prouve que les spectres de $L(\lambda)$ et $B(\lambda)$ coïncident.

Soit $\{u_i\}_{i=0}^{m}$ une chaîne pour $L(\lambda)$ correspondant à λ_0, i.e.

$$\sum_{i=0}^{j} \frac{1}{i!} L^{(i)}(\lambda_0) u_{j-i} = 0 \ , \quad j = 0, \cdots, m \ , \quad u_0 \neq 0. \tag{1.7}$$

On a $u_i \in D(T)$, par suite il existe $w_i \in \mathcal{H}$ tel que $u_i = Sw_i$. D'où on peut écrire (1.7) sous la forme suivante :

$$\sum_{i=0}^{j} \frac{1}{i!} B^{(i)}(\lambda_0) w_{j-i} = 0 \ , \quad j = 0, \cdots, m \ , \quad w_0 \neq 0. \tag{1.8}$$

i.e. $\{w_i\}_{i=0}^{m}$ est une chaîne de $B(\lambda)$ correspondant λ_0.

Inversement, si on suppose que $u_i = Sw_i$, alors la relation (1.7) résulte directement de (1.8). Donc on a prouvé la dernière partie du lemme, qui permet de conclure que les valeurs propres de $L(\lambda)$ et $B(\lambda)$ coïncident et que la multiplicité du vecteur propre w_0 de $B(\lambda)$ coïncide avec celle du vecteur propre Sw_0 de $L(\lambda)$. Comme S établit une correspondance bijective entre les sous-espaces $Ker(L(\lambda))$ et $Ker(B(\lambda))$, alors les multiplicités de la valeur propre λ_0 sont les mêmes pour les deux familles $L(\lambda)$ et $B(\lambda)$. Ce qui termine la preuve du lemme. □

Notre travail traite de familles d'opérateurs à coefficients non bornés, pour cela on va faire des hypothèses sur $\{H_i\}_{i=0}^{m}$.

Remarque 1.1.4. *Les spectres de la famille d'opérateurs quadratiques $L(\lambda)$ et* *de la famille matricielle de linéarisation $\mathcal{A}_L$, coïncident. Donc l'étude de spectre d'une famille est équivalente à l'étude du spectre de l'autre famille.*

1.2 Analyse fonctionnelle du problème

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe et soit

$$L(\lambda) = H_0 + \lambda H_1 + ... + \lambda^{m-1} H_{m-1} + \lambda^m, \tag{1.9}$$

$L(\lambda)$ est une famille d'opérateurs non bornés de $\mathcal{H}$, où $\lambda \in \mathbb{C}$.

De plus, H_0 est un opérateur fermé à domaine dense $D(H_0)$.
Les opérateurs $H_1, ..., H_{m-1}$ sont définis sur $D(H_0)$.

On considère les hypothèses suivantes.

Hypothèse ($\mathbf{H}_1$) : H_0 est un opérateur autoadjoint positif de domaine $D(H_0)$ dans $\mathcal{H}$.

Avant de donner la deuxième hypothèse on donne la définition suivante.

Définition 1.2.1. *Soient $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert complexes et $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ un opérateur compact. On désigne par $(\mu_j(T))_{j\geq 1}$ la suite décroissante des valeurs propres de $(T^*T)^{\frac{1}{2}}$ où chaque valeur propre est répétée suivant sa multiplicité. Soit p réel strictement positif. On dit que*

$$T \in \mathcal{C}^p(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$$

si

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(T)^p < +\infty$$

où $\mathcal{C}^p$ désigne la classe de Schatten.

Hypothèse ($\mathbf{H}_2$) : Il existe un réel $p > 0$ tel que :

$$H_0^{\frac{-1}{m}} \in \mathcal{C}^p(\mathcal{H}).$$

Hypothèse ($\mathbf{H}_2$) : Pour tout entier j, $0 \le j \le k-1$, les opérateurs $H_0^{-1} H_j$ et $H_0^{-1} H_j$ sont bornés dans $\mathcal{H}$.

Nous avons alors le résultat suivant.

Proposition 1.2.1. *Sous les hypothèses précédentes on a :*

i) $L(\lambda)$ définit un opérateur fermé de domaine $D(H_0)$.

ii) Si $L(\lambda)^{-1}$ existe, alors il est compact.

iii) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $L(\lambda)$ est un opérateur à indice et $Ind(L(\lambda)) = 0$.

Preuve :

i) Soient $(u_n)_{n\ge1}$ une suite de $D(H_0)$ et $u, f \in \mathcal{H}$ tels que :

$$\lim_{n\to+\infty} L(\lambda)u_n = f, \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = u, \quad dans\,\mathcal{H}.$$

On a

$$L(\lambda)u_n = (1 + \lambda H_1 H_0^{-1} + ... + \lambda^{m-1} H_{m-1} H_0^{-1} + \lambda^m H_0^{-1}) H_0 u_n. \tag{1.10}$$

Or $H_j H_0^{-1}$ est compact pour $1 \le j \le m-1$.

On en déduit qu'il existe une sous-suite $(u_{n_k})_{n\ge1}$ et $g \in \mathcal{H}$ tels que :

$$\lim_{k\to+\infty} H_0 u_{n_k} = g, \quad dans\,\mathcal{H}. \tag{1.11}$$

H_0 étant fermé, il en résulte que $u \in D(H_0)$ et que $L(\lambda)u = f$. D'où $L(\lambda)$ est fermé.

ii) On a

$$(H_0^{-\frac{1}{m}})^m = H_0^{-1}$$

d'où H_0^{-1} est compact et

$$L(\lambda)^{-1}u_n = H_0^{-1}(1+\lambda H_1 H_0^{-1}+...+\lambda^{m-1}H_{m-1}H_0^{-1}+\lambda^m H_0^{-1})^{-1}u_n,$$

donc $L(\lambda)^{-1}$ est compact (le produit d'un opérateur compact et d'un opérateur borné est un opérateur compact).

iii) On a

$$L(\lambda)H_0^{-1} = 1 + compact, \tag{1.12}$$

$$H_0^{-1}L(\lambda) = 1 + compact. \tag{1.13}$$

D'où $L(\lambda)$ est un opérateur à indice et

$$Ind(L(\lambda)) = -Ind(H_0^{-1}) = 0$$

($1 + compact$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro).

H_0^s étant injectif pour tout s, on munit $D(H_0^s)$ de la norme

$$\|u\|_{D(H_0^s)} = \|H_0^s u\|. \tag{1.14}$$

□

Proposition 1.2.2. $\lambda \to L(\lambda)^{-1}$ *est une fonction méromorphe dans* $\mathbb{C}$ *à valeur dans* $\mathcal{L}(\mathcal{H}, D(H_0))$ *(*$D(H_0)$*, muni de la norme du graphe, est un espace de Hilbert).*

Preuve :

Pour la famille $L(\lambda)$ dans (1.9), $H_m = 1$ on considère alors la linéarisation (1.3), donc on introduit l'opérateur matriciel suivant :

$$\mathcal{A}_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -H_0 & -H_1 & -H_2 & \cdots & -H_{m-1} \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

On considère $\mathcal{A}_L$ comme un opérateur fermé non borné de l'espace de Hilbert $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} = D(H_0^{\frac{(m-1)}{m}}) \times D(H_0^{\frac{(m-1)}{m}}) \times D(H_0^{\frac{(m-2)}{m}}) \times \cdots \times \mathcal{H}, \tag{1.16}$$

et de domaine

$$D(\mathcal{A}_L) = D(H_0) \times D(H_0^{\frac{(m-1)}{m}}) \times \cdots \times D(H_0^{\frac{1}{m}}).$$

L'inverse $\mathcal{A}_L^{-1}$ existe et définit un opérateur compact de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$. D'où $\mathcal{A}_L - \lambda$ est à indice, d'indice nul pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Or $\mathcal{A}_L - \lambda$ est injectif si et seulement si $L(\lambda)$ est injectif. Il en résulte que $\mathcal{A}_L - \lambda$ est inversible si et seulement si $L(\lambda)$ est inversible. Donc la fonction

$$\lambda \longrightarrow (\mathcal{A}_L - \lambda)^{-1}$$

est méromorphe de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{K})$. On pose

$$(\mathcal{A}_L - \lambda)^{-1} = (r_{ij}(\lambda))_{0 \le i,j \le m-1}. \tag{1.17}$$

Soit λ tel que $L(\lambda)^{-1}$ existe. On montre que :

$$L(\lambda)^{-1} = -r_{0,m-1}(\lambda) \tag{1.18}$$

En effet on commence par le cas $m = 2$, on trouve l'inverse de $\mathcal{A}_L - \lambda$ en utilisant des techniques classiques d'algèbre

$$(\mathcal{A}_L - \lambda) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Il faut alors résoudre le système

$$\begin{aligned} -\lambda u_1 + u_2 &= f_1 \\ -H_0 u_1 - (H_1 + \lambda) u_2 &= f_2 \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} u_1 = {} & -L(\lambda)^{-1}((H_1 + \lambda) f_1 + f_2) \\ u_2 = {} & -L(\lambda)^{-1}((-L(\lambda) + \lambda(H_1 + \lambda)) f_1 + \lambda f_2) \end{aligned}$$

donc on a

$$(\mathcal{A}_L-\lambda)^{-1}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L(\lambda)^{-1}(H_1+\lambda) & -L(\lambda)^{-1} \\ -L(\lambda)^{-1}(-L(\lambda)+\lambda(H_1+\lambda)) & -\lambda L(\lambda)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

d'où $r_{0,1}=-L(\lambda)$.

Pour le cas général en suivant la même méthode on a

$$(\mathcal{A}_L-\lambda)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

il faut alors résoudre le système

$$\begin{aligned} -\lambda u_1+u_2 &= f_1 \\ -\lambda u_2+u_3 &= f_2 \\ &\vdots \\ -\lambda u_j+u_{j+1} &= f_j \\ &\vdots \\ -\lambda u_{m-1}+u_m &= f_{m-1} \\ -H_0u_1-H_1u_2-\cdots-H_{m-1}u_{m-1}-(H_1+\lambda)u_m &= f_m \end{aligned}$$

Par conséquent on a

$$\begin{aligned} u_2 &= f_1+\lambda u_1 \\ u_3 &= f_2+\lambda f_1+\lambda^2u_1 \\ &\vdots \\ u_j &= f_{j-1}+\lambda f_{j-2}+\cdots+\lambda^{j-2}f_1+\lambda^{j-1}u_1 \\ &\vdots \\ u_m &= f_{m-1}+\lambda f_{m-2}+\cdots+\lambda^{m-2}f_1+\lambda^{m-1}u_1 \end{aligned}$$

et

$$u_1=-L(\lambda)^{-1}(f_1(H_1+\lambda H_2+\cdots+\lambda^{m-2}H_{m-1}+\lambda^{m-1})$$

$$+f_2(H_2+\lambda H_3+\cdots+\lambda^{m-3}H_{m-1}+\lambda^{m-2})+\cdots+f_{m-1}(H_{m-1}+\lambda)+f_m)$$

donc on a

$$(\mathcal{A}_L-\lambda)^{-1}=(r_{i,j}(\lambda))_{0\le i,j\le m-1},$$

où

$$r_{ij}(\lambda)=\left\{\begin{array}{ll} -\lambda^i s_j & ,\ i<j \\ L\lambda^{j-(j+1)}-\lambda^i s_j & ,\ i\ge j \end{array}\right\}$$

et

$$\begin{array}{rcl} s_0 &=& L(\lambda)^{-1}(H_1+\lambda H_2+\cdots+\lambda^{m-2}H_{m-1}+\lambda^{m-1}) \\ s_1 &=& L(\lambda)^{-1}(H_2+\lambda H_3+\cdots+\lambda^{m-3}H_{m-1}+\lambda^{m-2}) \\ s_j &=& L(\lambda)^{-1}(H_{j+1}+\lambda H_{j+2}+\cdots+\lambda^{m-(j+2)}H_{m-1}+\lambda^{m-(j+1)}) \\ s_{m-2} &=& L(\lambda)^{-1}(H_{m-1}+\lambda) \\ s_{m-1} &=& L(\lambda)^{-1} \end{array}$$

donc :

$$L(\lambda)^{-1}=-r_{0,m-1}(\lambda).$$

□

On a besoin du résultat suivant.

Proposition 1.2.3. ***(Gohberg-Krein [18])***
Si $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_1',\mathcal{H}_1)$, $B\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_2')$ et $T\in\mathcal{C}^p(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$, alors $B.T.A\in\mathcal{C}^p(\mathcal{H}_1',\mathcal{H}_2')$.

Proposition 1.2.4. *Sous les hypothèses précédentes on a*

$$\mathcal{A}_L^{-1}\in\mathcal{C}^p(\mathcal{K}).$$

Preuve :

Soit $Im\left(\mathcal{A}_L^{-1}\right)$ l'image de l'opérateur $\mathcal{A}_L^{-1}$ telle que :

$$Im\left(\mathcal{A}_L^{-1}\right)=D(H_0)\times D(H_0^{\frac{(m-1)}{m}})\cdots\times D(H_0^{\frac{(1)}{m}}).$$

En utilisant la proposition de Gohberg-Krein, pour montrer que $\mathcal{A}_L^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ il suffit de montrer que l'injection i est de classe $\mathcal{C}^p$, avec

$$i:Im\left(\mathcal{A}_L^{-1}\right)\to\mathcal{K},$$

Soit R l'opérateur défini de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ tel que :

$$R(u_0, \cdots, u_{m-1}) = (H_0^{\frac{(-1)}{m}} u_0, \cdots, H_0^{\frac{(-1)}{m}} u_{m-1})$$

Donc

$$\mathcal{A}_L^{-1} \in \mathcal{C}^p(\mathcal{K}) \Leftrightarrow R \in \mathcal{C}^p(\mathcal{K}).$$

Soit J l'opérateur

$$J(u_0, \cdots, u_{m-1}) = (H_0^{1-\frac{(-1)}{m}} u_0, \cdots, H_0^{\frac{(-1)}{m}} u_{m-1}),$$

qui est un isomorphisme de K sur H^m et de $D(\mathcal{A})$ sur $[D(H_0^{\frac{(1)}{m}})]$.

Alors on a :

$$R = J^{-1}.\tilde{R}.J$$

où

$$\tilde{R} : H^m \Rightarrow H^m$$

et

$$\tilde{R}(u_0, \cdots, u_{m-1}) = (H_0^{\frac{(-1)}{m}} u_0, \cdots, H_0^{\frac{(-1)}{m}} u_{m-1}).$$

Soient $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ la base des vecteurs propres associés à

$$[(H_0^{\frac{(-1)}{m}})^*(H_0^{\frac{(-1)}{m}})],$$

$(e_k)_{1\leq k\leq m}$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$ et

$$(\varphi_j e_k)_{1\leq k\leq m}$$

est la base des vecteurs propres de $(\tilde{R})^*(\tilde{R})$. Donc on a bien

$$\sum_j (\mu_j(\tilde{R}^*\tilde{R}))^p = m \sum_{j\geq 1} [\mu_j(H_0^{\frac{(-1)}{m}})]^p < +\infty.$$

$\square$

Définition 1.2.2. *On dit qu'une fonction entière*

$$F : \mathbb{C} \to \mathcal{B}$$

à valeurs dans un espace de Banach $\mathcal{B}$ *est de type* $p > 0$ *s'il existe une constante* $\gamma > 0$ *telle que :*

$$\|F(\lambda)\| \leq e^{\gamma|\lambda|^p}, \quad pour \ tout \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Proposition 1.2.5. *:*

i) Il existe une fonction entière ϕ *de type* p *à valeurs scalaires telle que :*

$$\lambda \to \phi(\lambda)L(\lambda)^{-1},$$

est une fonction entière de type p *à valeurs dans* $\mathcal{L}(\mathcal{H}, D(H_0))$*.*

ii) Pour tout $\epsilon > 0$*, il existe une suite* $(r_k)_{k\geq 1}$ *croissante de réels positifs telle que :*

$$\lim_{k\to+\infty} r_k = +\infty$$

et une constante $C_\epsilon > 0$ *telle que :*

$$\max_{|\lambda|=r_k} \|L(\lambda)^{-1}\|_{(\mathcal{H},D(H_0))} \leq C_\epsilon e^{r_k^{p+\epsilon}} \quad pour \ tout \ k \geq 1.$$

La démonstration de ce résultat se trouve dans [25].

La définition suivante est donnée par (**Keldysh [20]**).

Définition 1.2.3. *Soit* $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ *tel que* $L(\lambda_0)$ *est non injectif. On appelle sous-espace propre généralisé de* L *associé à* λ_0 *le sous-espace vectoriel de* $D(H_0)$*, noté* $sp_{\lambda_0}[L]$*, engendré par les solutions des systèmes*

$$(S_k) \qquad \left\{ \begin{array}{rl} L(\lambda_0)u_0 & = 0 \\ L(\lambda_0)u_1 + \frac{dL}{d\lambda}(\lambda_0)u_0 & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ L(\lambda_0)u_k + \frac{dL}{d\lambda}(\lambda_0)u_{k-1} + ... + \frac{1}{k!}\frac{d^kL}{d\lambda^k}(\lambda_0)u_0 & = 0 \end{array} \right\} \qquad (1.20)$$

où $k \in \mathbb{N}$ i.e. $\{u_i\}_{i=0}^{k}$ forme une chaîne de Jordan de longueur $k+1$.

Chaque valeur λ_0 correspond à un sous-espace propre généralisé de dimension fini.

Pour la preuve du résultat suivant on a besoin de l'hypothèse suivante.

Hypothèse 4 : Pour tout entier j, $0 \leq j \leq m-1$, les opérateurs $H_j H_0^{\frac{(j-m)}{m}}$ et $H_0^{\frac{(j-m)}{m}} H_j$ sont bornés dans $\mathcal{H}$.

Proposition 1.2.6. *Si $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}} sp_\lambda[\mathcal{A}_L]$ est total dans $\mathcal{K}$, alors $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}} sp_\lambda[L]$ est total dans $\mathcal{H}$.*

Preuve :

On a

$$\lambda \to (L(\lambda))^{-1}$$

est méromorphe. Soit λ_0 un pôle de cette fonction. On écrit son développement de Laurent au voisinage de λ_0

$$(L(\lambda))^{-1} = \frac{Q_r}{(\lambda-\lambda_0)^r} + \cdots + \frac{Q_1}{\lambda-\lambda_0} + S(\lambda), \tag{1.21}$$

où S est holomorphe au voisinage de λ_0.

Pour $1 \leq j \leq r$, Q_j est donné par la formule de Cauchy

$$Q_j = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda-\lambda_0|=\epsilon} (\lambda-\lambda_0)^{j-1}(L(\lambda))^{-1} d\lambda,$$

où $\epsilon > 0$ est assez petit. D'où il résulte que :

$$Im(Q_1) + \cdots + Im(Q_r) \subseteq D(H_0).$$

Pour terminer la preuve on a besoin du lemme suivant (pour la preuve c.f. [25]).

Lemme 1.2.1. $sp_{\lambda_0}[L] = Im(Q_r) + \cdots + Im(Q_1)$

On écrit le développement de Laurent de $(\mathcal{A}_L)^{-1}$ au voisinage de λ_0

$$(\mathcal{A}_L - \lambda)^{-1} = \frac{B_r}{(\lambda-\lambda_0)^r} + \cdots + \frac{B_1}{(\lambda-\lambda_0)} + T(\lambda). \tag{1.22}$$

Donc on a

$$sp_{\lambda_0}[\mathcal{A}_L] = Im(B_r) + \cdots + Im(B_1).$$

On calcule les B_j en fonction des Q_j, on a

$$(\mathcal{A}_L - \lambda)^{-1} = (r_{ij}(\lambda))_{0\leq i,j\leq m-1}.$$

De la définition de $\mathcal{A}$, on a la première ligne de $(\mathcal{A}_L - \lambda)^{-1}$

$$\begin{aligned} r_{0,0}(\lambda) &= -L(\lambda)^{-1}(\sum_{j=0}^{m-2} \lambda^j H_{j+1} + \lambda^{m-1}) \\ r_{0,1}(\lambda) &= -L(\lambda)^{-1}(\sum_{j=1}^{m-2} \lambda^{j-1} H_{j+1} + \lambda^{m-2}) \\ \vdots &\quad \vdots \\ r_{0,m-1}(\lambda) &= -L(\lambda)^{-1} \end{aligned}$$

La ligne l, $0 \leq l \leq m-1$, est donnée par

$$\begin{aligned} r_{l,0}(\lambda) &= \lambda^l + \lambda^{l+1} r_{0,0}(\lambda) \\ r_{l,1}(\lambda) &= \lambda^{l-1} + \lambda^{l+1} r_{0,1}(\lambda) \\ \vdots &\quad \vdots \\ r_{l,l}(\lambda) &= \lambda^{l+1} r_{0,l}(\lambda) \\ \vdots &\quad \vdots \\ r_{l,m-1}(\lambda) &= \lambda^{l+1} r_{0,m-1}(\lambda) \end{aligned}$$

On rappelle que $(\mathcal{A}_L - \lambda)^{-1}$ est un opérateur dans $\mathcal{K}$ où

$$\mathcal{K} = D(H_0^{1-(\frac{1}{m})}) \times D(H_0^{\frac{1}{m}}) \times \mathcal{H}.$$

D'après des résultats précédents, il existe une matrice d'opérateurs :

$$\left(C_{i,j}^{(k)}\right)_{0\leq i,j\leq m-1}, \quad pour\ 1 \leq k \leq r,$$

où $C_{i,j}^{(k)}$ est un opérateur défini sur $\mathcal{K}$ tel que :

$$B_k = Q_k(C_{i,j}^{(k)})_{0 \le i,j \le m-1}.$$

D'où il résulte que $sp_{\lambda_0}[L]$ contient la projection de $sp_{\lambda_0}[\mathcal{A}_L]$ sur chacun des facteurs de $\mathcal{K}$. On a alors la proposition(1.2.6). $\square$

Proposition 1.2.7. *On a*

$$Q_k = -(B_k)_{(0,m-1)}, \tag{1.23}$$

donc

$$dim(sp_{\lambda_0}[L]) < +\infty,$$

sachant que $dim(sp_{\lambda_0}[\mathcal{A}_L]) < +\infty$.

Preuve :

D'après (1.18) on a que la composante d'indice $(0, m-1)$ de l'opérateur matriciel $(\mathcal{A}_L - \lambda)^{-1}$ est égal à $-L(\lambda)^{-1}$, d'où en utilisant (1.21) et (1.22) on obtient (1.23). Cela donne directement que λ_0 est une valeur propre de multiplicité r pour L si et seulement si λ_0 est une valeur propre de multiplicité r pour $\mathcal{A}_L$ ce qui achève la preuve. $\square$

Le sous-espace propre géneralisé engendré par les vecteurs propres correspondant à la valeur propre λ_0 est de la même dimension pour l'opérateur L et pour le système $\mathcal{A}_L$.

Le résultat suivant est parmi les résultats principaux du travail de Pham-Robert [25], ce résultat nous permet de prouver l'existence d'un système de vecteurs propres généralisés.

Théorème 1.2.1. ***(Pham-Robert)***

On suppose qu'il existe s demi-droites $\Delta_1, ..., \Delta_s$ issues de 0 et divisant le plan *complexe en s secteurs d'ouverture $\alpha_j < \frac{\pi}{p}$ pour $j = 1, ..., s$. On suppose de plus qu'il existe un entier $N \geq 0$ tel que :*

$$\|L(\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},D(H_0))} = \mathcal{O}(|\lambda|^N) \quad lorsque\ |\lambda| \to +\infty,\ \lambda \in \Delta_1 \cup ... \cup \Delta_s.$$

Alors l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres généralisés de L est dense dans $\mathcal{H}$.

Pour la preuve on a besoin du théorème suivant de Dunford-Schwartz (pour la preuve voir [17]). Le théorème de Pham-Robert est une généralisation du théorème de Dunford-Schwartz pour les familles polynomiales d'opérateurs.

Théorème 1.2.2. ***(Dunford-Schwartz)***
Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et K un opérateur de classe de Schatten $\mathcal{C}_p$. On suppose que le plan complexe est divisé par s demi-droites $\gamma_1, \cdots, \gamma_s$ d'origine 0, il existe un entier N tels que :
1) L'angle formé par deux demi-droites adjacentes soit strictement inférieur à $\frac{\pi}{p}$.
2) Sur chacune de ces demi-droites :

$$\|(\lambda - K)^{-1}\| = \mathcal{O}(|\lambda|^{-N}),$$

quand $|\lambda|$ tend vers 0.
Alors $K^N(\mathcal{H})$ est inclus dans l'adhérence de l'espace engendré par les vecteurs propres généralisés associés aux valeurs propres non nulles de K.

Preuve du théorème 1.2.1 :
Grâce au lemme 1.1.2 on sait que les spectres de L et $\mathcal{A}_L$ coincïdent, i.e. L est inversible si et seulement si $\mathcal{A}_L$ est inversible, donc en utilisant (1.21) et (1.22) l'hypothèse

$$\|L(\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},D(H_0))} = \mathcal{O}(|\lambda|^N),$$

entraîne qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$\|(\mathcal{A}_L - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} = \mathcal{O}(|\lambda|^M),$$

sous les mêmes conditions. D'après le théorème de Dunford-Schwartz 1.2.2, on déduit que l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres généralisés de $\mathcal{A}_L$ est dense dans $\mathcal{K}$. On obtient alors le théorème (1.2.1) en utilisant la proposition (1.2.6). $\square$

Pour appliquer ce qui précède à des opérateurs différentiels, il est utile de définir les directions du plan complexe où la croissance de $L(\lambda)^{-1}$ est optimale, on appelle ces directions les rayons de croissance minimale.

Définition 1.2.4. *Pour $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\rho_0 \geq 0$, on pose*

$$\Delta(\theta, \rho_0) = \{\rho e^{i\theta},\ \rho > \rho_0\}.$$

On dira que $\Delta(\theta, \rho_0)$ est un rayon de croissance minimale pour L s'il existe $C > 0$ tel que :

$$\|L(\rho e^{i\theta})^{-1}\|_{\mathsf{L}(\mathcal{L}^2, D(H_0^s))} \leq \frac{C}{\rho^{m(1-s)}}, \tag{1.24}$$

pour tout $\rho \geq \rho_0$ et tout $s \in [0, 1]$.

On démontre que (1.24) est satisfaite pour

$$s = \frac{(m-j)}{m}, \quad 0 \leq j \leq m-1,$$

i.e. il existe $C' > 0$ telle que :

$$\|(\mathcal{A}_L - \rho e^{i\theta})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \leq \frac{C'}{\rho}, \quad \textit{pour } \rho > \rho_0,$$

c'est à dire que $\Delta(\theta, \rho_0)$ est un rayon de croissance minimale usuel pour $\mathcal{A}_L$. Dans le résultat suivant on montre que les rayons de croissance minimale sont stables pour certaines perturbations.

Proposition 1.2.8. *Soit*

$$Q(\lambda) = Q_0 + \lambda Q_1 + \ldots + \lambda^{m-1} Q_{m-1}$$

un polynôme à coefficients opérateurs, de degré $< m-1$. On suppose que pour tout $j = 0, 1, ..., m-1$, il existe $\theta_j \in]0, \frac{1}{m}]$ tel que :

$$Q_j H_0^{\frac{(j-m)}{m}+\theta_j},$$

se prolonge par un opérateur borné sur $\mathcal{H}$. Si $\Delta(\theta, \rho_0)$ est un rayon de croissance minimale pour L, alors il existe $\rho_0' \geq 0$ tel que $\Delta(\theta, \rho_0')$ soit un rayon de croissance minimale pour $L + Q$.

Preuve : Pour prouver que $Q(\lambda)$ est une perturbation compacte de $L(\lambda)$, il suffit de prouver que

$$Q_0, \cdots, Q_{m-1}$$

sont des perturbations compactes de H_0 et pour cela il faut prouver que $H_0^{-1} Q_j$ est compact pour $j = 0, \cdots, m-1$, ce qui est évident car :

$$H_0^{\frac{(j-m)}{m}+\theta_j},$$

se prolonge en un opérateur borné sur $\mathcal{H}$ et

$$H_0^{-1} H_0^{\frac{(j-m)}{m}+\theta_j} = H_0^{\frac{(j-2m)}{m}+\theta_j}$$

est compact. D'où

$$Ind(L(\lambda)) = Ind(L(\lambda) + Q(\lambda)) = 0,$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. On pose

$$L'(\lambda) = L(\lambda) + Q(\lambda).$$

Pour $\lambda \in \Delta(\theta, \rho_0)$ on a

$$L'(\lambda) = (1 + Q(\lambda) L(\lambda)^{-1}) L(\lambda).$$

Or on a

$$\lambda^j Q_j L(\lambda)^{-1} = \lambda^j Q_j H_0^{\frac{j-m}{m}+\theta_j} H_0^{-(\frac{j-m}{m}+\theta_j)} L(\lambda)^{-1} \quad pour \ \ \lambda \in \Delta(\theta, \rho_0).$$

En utilisant les hypothèses de la proposition (1.2.5), on en déduit qu'il existe $C_j > 0$ tel que :

$$\|\lambda^j Q_j L(\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{C_j}{|\lambda|^{m\theta_j}}\,, \quad \forall \lambda \in \Delta(\theta, \rho_0).$$

$L'(\lambda)$ est alors injectif donc bijectif pour tout $\lambda \in \Delta(\theta, \rho_0')$ et

$$L'(\lambda)^{-1} = L(\lambda)^{-1}(1 + Q(\lambda)L(\lambda)^{-1})^{-1}.$$

Or

$$\|(I + Q(\lambda)L(\lambda)^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1\,, \quad \forall \lambda \in \Delta(\theta, \rho_0'),$$

d'où

$$\|(L'(\rho e^{i\theta})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}, H_0^s)} \leq \frac{C}{\rho^{m(1-s)}}\,, \quad \forall \rho \geq \rho_0'.$$

□

2

Calculs des coefficients pour la dimension impaire

Sommaire

Notre travail traite de familles d'opérateurs quasi-homogènes. Afin de prouver l'existence de valeurs propres pour une famille d'opérateurs par les techniques complexes et pseudodifférentielles, nous étudions le comportement de résolvantes suivant certaines directions du plan complexe.

Les techniques complexes consistent à utiliser le principe de Phragmén-Lindelöf qui est une généralisation du principe du maximum. On en déduit alors l'existence de valeurs propres dans certains secteurs du plan complexe.

Les techniques pseudo-différentielles consistent à étudier les secteurs de plan complexe dans lesquels on trouve les valeurs propres.

Nous allons exposer quelques difficultés à appliquer ces techniques et puis nous allons donner quelques résultats pour lesquels on surmonte ces difficultés.

2.1 Analyse différentielle du problème

On considère la famille quadratique d'opérateurs suivante :

$$L(\lambda) = H_0 + \lambda H_1 + \lambda^2,$$

où H_0, H_1 sont des opérateurs pseudodifférentiels sur $\mathbb{R}^n$ avec des symboles $H_0(x,\xi)$, $H_1(x,\xi)$ respectivement, tel qu'il existe des fonctions des poids ϕ, φ, μ définies sur $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$ et des constantes C_0, C_1 telles que :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta H_0(x,\xi)| \leq \quad C_0 \mu \phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|}$$

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta H_1(x,\xi)| \leq \quad C_1 \mu^{\frac{1}{2}} \phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|}$$

où $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Le symbole de L est alors

$$L(x,\xi,\lambda) = H_0(x,\xi) + \lambda H_1(x,\xi) + \lambda^2.$$

Voir l'appendice B pour les définisions générales concernant les classes d'opérateurs pseudodifférentiels utilisées dans ce travail.
On considère l'hypothèse suivante :

(**H**) Il existe des entiers k et ℓ tels que :

$$\begin{aligned} L(r^{\frac{1}{m}}x, r^{\frac{1}{\ell}}\xi, r^{\frac{1}{2}}\lambda) &= r(H_0(x,\xi) + \lambda H_1(x,\xi) + \lambda^2), \\ &= rL(x,\xi,\lambda), \end{aligned}$$

pour tout $r > 0$.

On peut prendre alors

$$\begin{aligned} \mu(x,\xi) &= (1 + |\xi|^\ell + |x|^m) \quad , \\ \phi(x,\xi) &= (1 + |\xi|^\ell + |x|^m)^{\frac{1}{m}}, \\ \varphi(x,\xi) &= (1 + |\xi|^\ell + |x|^m)^{\frac{1}{\ell}}. \end{aligned}$$

On donne maintenant les hypothèses suivantes :

(**E**) $L(x, \xi, \rho) \neq 0$ pour tout $\rho \geq 0$ et tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\})$ (ellipticité globale).

(**C**) H_0 prend ses valeurs dans un cône propre de $\mathbb{C}$, symétrique par rapport à l'axe réel.

On désigne par S_L le cône de $\mathbb{C}$ (voir hypothèse **H**) est défini par :

$$S_L = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}) \ \textit{tel que} \ L(\lambda, x, \xi) = 0\}.$$

On sait que H_0 admet un prolongement fermé unique, à partir de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, comme opérateur non borné de $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ (c.f. corollaire (B.1.1)). On désigne alors par $D(H_0)$ le domaine de la fermeture de H_0. Pour tout entier N, on construit des paramétrix à droite et à gauche avec des symboles $B_N(x, \xi, \lambda)$, $C_N(x, \xi, \lambda)$ de sorte que :

$$\sigma(L)(\lambda) \circ B_N(\lambda) = I + R_N(\lambda),$$

$$C_N(\lambda) \circ \sigma(L)(\lambda) = I + S_N(\lambda),$$

tels que :

$$B_N(x, \xi, \lambda) = b_0(x, \xi, \lambda) + ... + b_N(x, \xi, \lambda)$$

$$C_N(x, \xi, \lambda) = c_0(x, \xi, \lambda) + ... + c_N(x, \xi, \lambda)$$

où les symboles principaux $b_j(x, \xi, \lambda)$ et $c_j(x, \xi, \lambda)$ sont définis par :

$$b_0(x, \xi, \lambda) \quad = \quad c_0(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{L(x, \xi, \lambda)}$$

et pour $j \geq 0$ on a

$$\begin{aligned} b_{j+1}(x, \xi, \lambda) \quad &= \quad -\frac{1}{L(x, \xi, \lambda)} \sum_{\Lambda} \Gamma(\alpha, \beta) \partial^\alpha D^\beta L(x, \xi, \lambda) \partial^\beta D^\alpha b_l(x, \xi, \lambda), \\ c_{j+1}(x, \xi, \lambda) \quad &= \quad -\frac{1}{L(x, \xi, \lambda)} \sum_{\Lambda} \Gamma(\alpha, \beta) \partial^\alpha D^\beta c_l(x, \xi, \lambda) \partial^\beta D^\alpha L(x, \xi, \lambda), \end{aligned} \tag{2.1}$$

où

$$\Lambda = \{0 \le l \le j, |\alpha| + |\beta| + l = j+1\}$$

$$\Gamma(\alpha, \beta) = (-1)^{|\beta|} \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{|\alpha|!|\beta|!}\right)$$

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \quad et \quad D^\beta = (i)^{-|\alpha|} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}.$$

Les formes asymptotiques des restes $R_N(\lambda)$ et $S_N(\lambda)$ sont les suivantes :

$$R_N(x, \xi, \lambda) = \sum_{\Lambda'} \Gamma(\alpha, \beta) \partial^\alpha D^\beta L(x, \xi, \lambda) \partial^\beta D^\alpha b_j(x, \xi, \lambda).$$

$$S_N(x, \xi, \lambda) = \sum_{\Lambda'} \Gamma(\alpha, \beta) \partial^\alpha D^\beta c_j(x, \xi, \lambda) \partial^\beta D^\alpha L(x, \xi, \lambda),$$

où

$$\Lambda' = \{0 \le j \le N, N+1 \le |\alpha| + |\beta| + j \le N+2\}.$$

On donne les estimations suivantes pour le symbole de la paramétrix à droite $B_N(\lambda, x, \xi)$ et le reste $R_N(\lambda, x, \xi)$, et on a les mêmes estimations pour le symbole de la paramétrix à gauche $C_N(\lambda, x, \xi)$ et le reste $S_N(\lambda, x, \xi)$.

Lemme 2.1.1. *Pour tout entier $N \ge 0$ et pour tout multi-indices α et β, il existe des constantes $C_N(\alpha, \beta)$, $C'_N(\alpha, \beta)$ telles que :*

$$(i) \quad |\partial^\alpha D^\beta B_N(\lambda, x, \xi)| \le C_N(\alpha, \beta)(\rho^2 + |x|^m + |\xi|^\ell)^{-1-\frac{|\alpha|}{\ell}-\frac{|\beta|}{m}},$$

$$(ii) \quad |\partial^\alpha D^\beta R_N(\lambda, x, \xi)| \le C'_N(\alpha, \beta)(\rho^2 + |x|^m + |\xi|^\ell)^{-(N+1)(\frac{1}{m}+\frac{1}{\ell})-\frac{|\alpha|}{\ell}-\frac{|\beta|}{m}},$$

pour tout $\lambda = \rho e^{i\theta}$, $\rho \ge 0$ et $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Preuve :

En utilisant le fait que les b_j vérifient la relation d'homogénéité :

$$\partial^\alpha D^\beta b_j(r^{\frac{1}{2}}\lambda, r^{\frac{1}{m}}x, r^{\frac{1}{\ell}}\xi) = r^\nu \partial^\alpha D^\beta b_j(\lambda, x, \xi),$$

$$\partial^\alpha D^\beta c_j(r^{\frac{1}{2}}\lambda, r^{\frac{1}{m}}x, r^{\frac{1}{\ell}}\xi) = r^\nu \partial^\alpha D^\beta c_j(\lambda, x, \xi),$$

où

$$\nu = -1 - j(\frac{1}{m} + \frac{1}{\ell}) - \frac{|\alpha|}{\ell} - \frac{|\beta|}{m}.$$

On a

$$|\partial^\alpha D^\beta L(\lambda, x, \xi)| \leq C(\alpha, \beta)(\rho^2 + |x|^m + |\xi|^\ell)^{1-\frac{|\alpha|}{\ell}-\frac{|\beta|}{m}},$$

ce qui achève la démonstration. □

On désigne $B_N(\lambda, x, D)$, $C_N(\lambda, x, D)$, $R_N(\lambda, x, D)$ et $S_N(\lambda, x, D)$ les opérateurs pseudodifférentiels avec les symboles $B_N(\lambda, x, \xi)$, $C_N(\lambda, x, \xi)$, $R_N(\lambda, x, \xi)$ et $S_N(\lambda, x, \xi)$, respectivement.

Pour déduire les estimations précédentes des majorations de norme pour les opérateurs $B_N(\lambda, x, D)$, $C_N(\lambda, x, D)$, $R_N(\lambda, x, D)$ et $S_N(\lambda, x, D)$, on donne la définition et le résultat suivants.

Définition 2.1.1. *On désigne par $\mathcal{S}^0$ l'espace des symboles $s \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tels que pour tous multi-indices α et β on a :*

$$\sup_{\mathbb{R}^{2n}} |\partial^\alpha D^\beta s(x, \xi)| < +\infty.$$

$\mathcal{S}^0$ est un espace de Fréchet muni de la famille suivante de semi-normes :

$$P_j(s) = \max_{|\alpha|+|\beta| \leq j} [\sup_{\mathbb{R}^{2n}} |\partial^\alpha D^\beta s(x, \xi)|].$$

Si $s \in \mathcal{S}^0$ alors $s(x, D)$ est un opérateur borné de $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ dans lui même ([16]). Pour bien expliquer ce résultat on donne le théorème suivant.

Théorème 2.1.1. ***(Théorème de Calderon-Vaillancourt)***
Il existe une constante $\gamma_0 > 0$, et un entier $j_0 \geq 0$ qui ne dépend que de l'entier n tels que :

$$\|s(x, D)\|_{\mathcal{L}(\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n), \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n))} \leq \gamma_0 \max_{|\alpha|+|\beta| \leq j_0} \sup_{\mathbb{R}^{2n}} |\partial^\alpha D^\beta s|$$

pour tout $s \in \mathcal{S}^0$.

Lemme 2.1.2. *:*

(i) $B_N(\lambda, x, D) \in \mathcal{L}(\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n), D(H_0))$ *pour tout entier* N *et* $\lambda \in \Delta(\theta, 0)$*. On a :*

$$\begin{array}{lrcl} (i_1) & \|B_N(\lambda, x, D)\|_{\mathcal{L}(\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n), D(H_0))} & = & \mathcal{O}(1)\,, \quad \lambda \to +\infty\,, \quad \lambda \in \Delta(\theta, 0), \\ (i_2) & \|B_N(\lambda, x, D)\|_{\mathcal{L}(\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n), \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n))} & = & \mathcal{O}(\frac{1}{|\lambda|^2})\,, \quad \lambda \to +\infty\,, \quad \lambda \in \Delta(\theta, 0). \end{array}$$

(ii) $R_N(\lambda, x, D) \in \mathcal{L}(\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n), \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n))$ *pour tout entier* N *et tout* $\lambda \in \Delta(\theta, 0)$*.*

(iii) $\|R_N(\lambda, x, D)\|_{\mathcal{L}(\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n), \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n))} = \mathcal{O}(\frac{1}{|\lambda|^{2(N+1)}})$*, pour* $|\lambda| \to +\infty$*,* $\lambda \in \Delta(\theta, 0)$*.*

Preuve :

En utilisant le lemme (2.1.1), on a :

$$|\partial^\alpha D^\beta B_N(\lambda, x, \xi)| \leq C_N(\alpha, \beta)\rho^{-2}$$

$$|\partial^\alpha D^\beta R_N(\lambda, x, \xi)| \leq C'_N(\alpha, \beta)\rho^{-2(N+1)-|(k+\ell).(\alpha+\beta)|}.$$

Du théorème (2.1.1), on a (i_2) et (ii).

Pour trouver (i_1), on calcule le symbole de $H_0(x, D)B_N(\lambda, x, D)$:

$$H_0 B_N(\lambda) = \sum_{|\gamma+\delta|=N} \Gamma(\gamma, \delta)\partial^\gamma D^\delta H_0(x, \xi)\partial^\delta D^\gamma B_N(\lambda, x, \xi).$$

Alors pour tout N, α et β, il existe $C''_N(\alpha, \beta) > 0$ tel que :

$$|\partial^\alpha D^\beta (H_0 B_N(\lambda))| \leq C''_N(\alpha, \beta) \ \textit{pour}\ \lambda \in \Delta(\theta, 0), (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

On peut appliquer le théorème (2.1.1), donc

$$H_0(x, D)B_N(\lambda, x, D) \in \mathcal{L}(\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n), \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)).$$

Alors on a $B_N(\lambda, x, D) \in \mathcal{L}(\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n), D(H_0))$ et (i_1) est vérifiée. □

Proposition 2.1.1. *On a*

(i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$*,* $L(\lambda)$ *admet un prolongement fermé unique sur le domaine* $D(H_0)$*.*

(ii) Il existe un cône propre Γ de $\mathbb{C}$, symétrique par rapport à l'axe réel tel que :

$$(H_0 - \mu)^{-1} \textit{ existe pour tout } \mu \in \Gamma,$$

et :

$$\|(H_0 - \mu)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n))} = \mathcal{O}(\frac{1}{|\mu|}), \quad |\mu| \to +\infty, \mu \in \Gamma.$$

(iii) $(H_0 - \mu)^{-1}$ est compact en tout point μ de l'ensemble résolvant de H_0.

Preuve :

Soit $\sigma_0(L)(\lambda)$ le symbole principal de L. Si $\lambda \in \Gamma$, $\lambda \neq 0$ tel que $\sigma_0(L)(\lambda)$ est inversible pour $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. On construit les paramétrix à droite et à gauche de $L(\lambda)$ donné dans les équations en (2.1) telles que :

$$\begin{aligned} (d) \qquad & \sigma(L)(\lambda).B_N(\lambda) = 1 + R_N(\lambda), \\ (g) \qquad & C_N(\lambda).\sigma(L)(\lambda) = 1 + S_N(\lambda). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme (2.1.2) alors il existe N_0 entier tel que pour $N \geq N_0$, on a

$$\|R_N(\lambda)\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(\frac{1}{|\lambda|^{2(N_0+1)}}), \quad \textit{pour } |\lambda| \to +\infty, \lambda \in \Delta(\theta, 0), \tag{2.2}$$

et

$$\|S_N(\lambda)\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(\frac{1}{|\lambda|^{2(N_0+1)}}), \quad \textit{pour } |\lambda| \to +\infty, \lambda \in \Delta(\theta, 0). \tag{2.3}$$

Soit L' un prolongement de $L(\lambda)$, L' est fermé et on a

$$B_N(\lambda)(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}.$$

On en déduit que

$$B_N(\lambda)(\mathsf{L}^2) \subset \mathcal{S}^c,$$

où $\mathcal{S}^c$ désigne le complété de $\mathcal{S}$ pour la norme suivante :

$$\|u\|_c = \|u\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)} + \|L(\lambda)u\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Aussi on a

$$\mathcal{S}^c \subset D(L').$$

On utilise (g), on a $L' - \lambda$ est injectif pour $|\lambda| \geq \lambda_0$ et $\lambda \in \Gamma$. De (d), on a

$$(L'(\lambda).B_N(\lambda).(1 + R_N(\lambda))^{-1} = 1,$$

d'où $L'(\lambda)$ est surjectif et

$$(L'(\lambda))^{-1} = B_N(\lambda).(1 + R_N\lambda)^{-1}. \tag{2.4}$$

Comme on a

$$\|B_N(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n),\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n))} = \mathcal{O}(\frac{1}{\lambda^2})\,, \quad \lambda \to \infty\,,\ \lambda \in \Gamma,$$

$$(L'(\lambda))^{-1} = B_N(\lambda).(1 + R_N(\lambda))^{-1}$$

entraîne que

$$D(L') \subset Im(B_N(\lambda))$$

d'où $D(L') = \mathcal{S}^c$, ce qui donne l'unicité du prolongement. Donc l'opérateur défini par

$$D(L') = \mathcal{S}^c = D(H_0)$$

et $L'u = L(\lambda)u$, pour $u \in \mathcal{S}^c$ est un prolongement de $L(\lambda)$. On a donc démontré (i). La preuve de (ii) est un conséquence de (2.4). La preuve de (iii) est donc due à l'injection compacte de $D(H_0)$ dans $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Pour prouver que le système des vecteurs propres généralisés de l'opérateur $L(\lambda)$ est total on donne les résultats suivants de Pham et Robert [25].

Théorème 2.1.2. *Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Il existe ρ_0 positif ou nul tel que $\Delta(\theta, \rho_0)$ soit un rayon de croissance minimale pour L si et seulement si*

$$\Delta(\theta, 0) \subseteq \mathbb{C} \setminus S_L.$$

Ce théorème donne la condition nécessaire et suffisante pour que $\Delta(\theta, \rho)$ soit un rayon de croissance minimale.

Théorème 2.1.3. *Soient* $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$ *tels que :*

$$\Delta(\theta_1, 0) \cup \Delta(\theta_2, 0) \subset \mathbb{C} \setminus S_L$$

et

$$\theta_2 - \theta_1 < \frac{m\ell\pi}{2n(m+\ell)}.$$

S'il existe

$$\theta \in]\theta_1, \theta_2[$$

tel que $\Delta(\theta, 0) \subset S_L$*, alors il existe*

$$\lambda_0 \in \mathbb{C}\,, \quad \arg(\lambda_0) \in [\theta_1, \theta_2]$$

tel que $L(\lambda_0)$ *ne soit pas injectif.*

Théorème 2.1.4. *Soient* $\Delta(\theta_1, 0), ..., \Delta(\theta_s, 0)$*,* s *demi-droites du plan complexe. On suppose*

(i) $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < ... < \theta_s \leq 2\pi$*,*

(ii) $|\theta_{j+1} - \theta_j| < \frac{m\ell\pi}{2n(m+\ell)}$ *pour* $j = 1, ..., s-1$*,* $\theta_1 < \frac{m\ell\pi}{2n(m+\ell)}$ *et* $\theta_1 - \theta_s + 2\pi < \frac{m\ell\pi}{2n(m+\ell)}$*,*

(iii) $\Delta(\theta_j, 0) \subset \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}_L$ *pour* $j = 1, ..., s$*.*

Alors l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres généralisés de L *est dense dans* $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)$*.*

Avant de donner les preuves de ces théorèmes on rappelle le principe de Phragmén-Lindelöf.

Théorème 2.1.5. ***Principe de Phragmén-Lindelöf***

Soit g *une fonction à valeurs complexes* z*, définie et holomorphe à l'intérieur du secteur angulaire* σ *délimité par l'intersection de deux arcs différentiables de*

Jordan γ_1 et γ_2 et faisant un angle d'ouverture inférieur à $\frac{\pi}{p}$ à l'origine. On suppose que

1) g est holomorphe dans le voisinage de chacun des arcs demi-ouverts $\gamma_1 - \{0\}$ et $\gamma_2 - \{0\}$,

2) g est bornée sur chacun de ces arcs demi-ouverts,

3) $|g(z)| = \mathcal{O}(\exp |z|^p)$, lorsque $z \to +\infty$, z reste à l'intérieur du secteur σ. Alors $|g(z)| = \mathcal{O}(1)$ lorsque $z \to +\infty$, z reste à l'intérieur du secteur σ.

Preuve du théorème (2.1.2) :

On suppose

$$\Delta(\theta, 0) \subseteq \mathbb{C} \setminus S_L,$$

et on montre qu'il existe $\rho_0 \geq 0$ tel que $\Delta(\theta, \rho_0)$ soit un rayon de croissance minimale pour L. On applique le lemme (2.1.2) avec $N = 0$, il existe $\rho > 0$ tel que $\rho \geq \rho_0$ d'où

$$R_0(\rho e^{i\theta}, x, D)\| \leq \frac{1}{2}.$$

On a alors

$$L(\lambda)B_0(\lambda)(\mathbb{I} + R_0(\lambda))^{-1} = \mathbb{I} \ \textit{pour} \ \lambda = \rho e^{i\theta}, \rho \geq \rho_0.$$

Il en résulte que :

$$L(\lambda) : D(H_0) \to \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

est surjectif. Or $L(\lambda)$ est d'indice nul. D'où $L(\lambda)$ est bijectif et

$$L(\lambda)^{-1} = B_0(\lambda)(\mathbb{I} + R_0(\lambda))^{-1} \ \textit{pour} \ \lambda = \rho e^{i\theta}, \rho \geq \rho_0.$$

Le lemme (2.1.2) entraîne que $\Delta(\theta, \rho_0)$ est un rayon de croissance minimale pour L.

Réciproquement, on suppose qu'il existe $\rho_0 \geq 0$ tel que $\Delta(\theta, \rho_0)$ soit un rayon de croissance minimale pour L, on prouve alors que :

$$\Delta(\theta, 0) \subseteq \mathbb{C} \setminus S_L.$$

De la définition du rayon de croissance minimale $\Delta(\theta, \rho_0)$, il existe $C > 0$ telle que :

$$\|L(\rho e^{i\theta})^{-1}\|_{\mathsf{L}^2, D(H_0^s)} \leq \frac{C}{\rho^{m(1-s)}},$$

pour $\rho \geq \rho_0$ et tout $s \in [0, 1]$, alors

$$\|L(\rho e^{i\theta})^{-1} w\|_{D(H_0^s)} \leq \frac{C}{\rho^{m(1-s)}} \|w\|_{\mathsf{L}^2},$$

pour $w \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, on pose $u = L(\rho e^{i\theta})^{-1} w$, alors on a

$$\|u\|_{D(H_0^s)} \leq \frac{C}{\rho^{m(1-s)}} \|L(\rho e^{i\theta}) u\|_{\mathsf{L}^2},$$

Il résulte des hypothèses qu'il existe $C > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} \rho^2 \|u\|_{\mathsf{L}^2} &\leq C \|L(\rho e^{i\theta) u}\|_{\mathsf{L}^2}, \\ \|D^\alpha u\|_{\mathsf{L}^2} &\leq C \|L(\rho e^{i\theta) u}\|_{\mathsf{L}^2}, \\ \|x^\beta u\|_{\mathsf{L}^2} &\leq C \|L(\rho e^{i\theta) u}\|_{\mathsf{L}^2}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\rho \geq \rho_0$, $|\alpha| \leq \ell$, $|\beta| \leq m$ où

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n), \quad \beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n),$$

et $x^\beta = (x_1^{\beta_1}, \cdots, x_n^{\beta_n})$. On va utiliser la méthode classique d'addition de variables. On établit des inégalités pour l'opérateur $L(e^{i\theta} D_t, x, D_x)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ où

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$D_x = (D_{x_1}, \cdots, D_{x_n}) \in \mathbb{R}^n.$$

On désigne par $\mathcal{S}_{\rho_0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions v tel que :

$$v \; : \; (t, x) \mapsto v(t, x),$$

tel que :

$$v \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \;\; et \;\; supp(\hat{v}) \subset]\rho_0, +\infty[\times \mathbb{R}^n,$$

où $\hat{v}$ désigne la transformation de Fourier partielle par rapport à t. En utilisant (2.5), il résulte que pour tout $v \in \mathcal{S}_{\rho_0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ on a

$$\begin{aligned} \|D_t^2 v\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} &\leq C\|L(e^{i\theta}D_t, x, D_x)v\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}, \\ \|D_x^\alpha v\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} &\leq C\|L(e^{i\theta}D_t, x, D_x)v\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}, \textit{ pour } |\alpha| \leq \ell, \\ \|x^\beta v\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} &\leq C\|L(e^{i\theta}D_t, x, D_x)v\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}, \textit{ pour } |\beta| \leq m. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Soit $(j_1, ..., j_n)$ une permutation de $\{1, ..., n\}$ et soit

$$\mathcal{O} = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{j_1} > 0, ..., x_{j_p} > 0 \,;\, x_{j_{p+1}} < 0, ..., x_{j_n} < 0\}.$$

On se donne alors

$$\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O})\,, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

tel que

$$\hat{\psi} \in \mathcal{C}_0^\infty]\rho_0, +\infty[\textit{ et } \int_{\mathbb{R}} |\psi(t)|^2 dt = 1.$$

On pose $\delta_j = 1 + \frac{m}{2}$, $1 \leq j \leq n$. Pour tout $\epsilon \in]0,1[$ on définit

$$u_\epsilon(x,t) = \epsilon^\nu \exp i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\xi_j |x_j|^\delta}{\delta} + t\rho|x|^{\delta-1} \right) \varphi(\epsilon x)\psi(\epsilon t).$$

où $\nu = m + \dfrac{n+1}{2}$.

Or on peut facilement obtenir les relations suivantes :

$$\|D_t^2 u_\epsilon\|_{\mathsf{L}^2}^2 = \rho^4 \||x|^m u_\epsilon\|_{\mathsf{L}^2}^2 + \mathcal{O}(1)\,, \;\; \epsilon \to 0, \tag{2.7}$$

$$\|D_x^\alpha u_\epsilon\|_{\mathsf{L}^2}^2 = \|(x_*^{\delta-1}\xi)^\alpha u_\epsilon\|_{\mathsf{L}^2}^2 + \mathcal{O}(1), \;\; \epsilon \to 0, \tag{2.8}$$

$$\|P(e^{i\theta}D_t, x, D_x)u_\epsilon\|_{\mathsf{L}^2}^2 = \int |P\left(\rho e^{i\theta}|x|^{\delta-1}, x, x_*^{\delta-1}\xi\right)|^2 |u_\epsilon(t,x)|^2 dt dx + \mathcal{O}(1)\,, \epsilon \to 0, \tag{2.9}$$

où $x_*^{\delta-1} = (x_1^{\delta-1}, ..., x_n^{\delta-1})$ et $x_*^{\delta-1}\xi = (x_1^{\delta-1}\xi_1, ..., x_n^{\delta-1}\xi_n)$.

Alors (2.7), (2.6) et (2.9) donnent

$$\rho^4 \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{2m} |\varphi(y)|^2 dy \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |P(\rho e^{i\theta}|y|^{\delta-1}, y, y_*^{\delta-1}\xi)|^2 |\varphi(y)|^2 dy,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O})$. D'où

$$\rho^4 |x|^{2m} \leq C |L(|x|^{\frac{m}{2}} \rho e^{i\theta}, x, x_*^{\frac{m}{2}} \xi)|^2, \forall \rho \geq \rho_0, \tag{2.10}$$

où $x \in \mathcal{O}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

On pose $x = r\sigma$ où r réel, $r > 0$ et $\sigma \in \mathcal{S}^n$. Par homogénéité de (2.10), il résulte

$$\rho^4 \leq C' |L(\rho e^{i\theta}, \sigma, \xi)|^2 \textit{ pour } \rho \geq \rho_0, \sigma \in (\mathcal{S}^n \cap \mathcal{O}) \textit{ et } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.11}$$

En utilisant (2.8) et (2.6), pour $|\alpha| = \ell$, on obtient

$$\rho^4 \leq C' |L(\rho e^{i\theta}, \sigma, \xi)|^2 \textit{ pour } \rho \geq \rho_0, \sigma \in (\mathcal{S}^n \cap \mathcal{O}) \textit{ et } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.12}$$

De (2.6), on a

$$1 \leq C' |L(\rho e^{i\theta}, \sigma, \xi)|^2, \textit{ pour } \rho \geq \rho_0, \ \sigma \in (\mathcal{S}^n \cap \mathcal{O}) \textit{ et } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

d'où

$$\left(1 + \rho^4 + |\xi|^{2\ell}\right)^{\frac{1}{2}} \leq C'' L(\rho e^{i\theta}, \sigma, \xi)$$

et par quasi-homogénéité

$$\left(|x|^{2m} + \rho^4 + |\xi|^{2\ell}\right)^{\frac{1}{2}} \leq C'' L(\rho e^{i\theta}, \sigma, \xi), \tag{2.13}$$

pour $\rho \geq \rho_0$, $x \in \mathcal{O}$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$. On en déduit que

$$\Delta(\theta, 0) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}_L.$$

$\square$

Preuve du théorème 2.1.3 :

On suppose que la conclusion n'est pas vérifiée. $L(\lambda)$ étant d'indice nul pour tout

$$\lambda \in \mathbb{C}\,, \quad \lambda \to L(\lambda)^{-1}$$

est analytique dans le secteur $\theta_1 < Arg(\lambda) < \theta_2$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n), D(H_0))$. Or l'hypothèse du théorème (2.1.3) et le théorème (2.1.2) entraînent

$$\|L(\lambda)^{-1}\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n),\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(\frac{1}{|\lambda|^2}) \quad et \quad \|L(\lambda)^{-1}\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n),D(H_0)} = \mathcal{O}(1). \tag{2.14}$$

sous la condition

$$|\lambda| \to +\infty, \quad \lambda \in (\Delta(\theta_1, 0) \cup \Delta(\theta_2, 0)).$$

On pose $p = \frac{2n(m+\ell)}{m\ell}$. Il résulte de la proposition (1.2.5) et du principe du maximum que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $C_\epsilon > 0$ tel que :

$$\|L(\lambda)^{-1}\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n),D(H_0)} \leq C_\epsilon e^{|\lambda|^{p+\epsilon}}, \quad pour \;\; \theta_1 \leq \arg(\lambda) \leq \theta_2.$$

Le principe de Phragmén-Lindelöf implique alors (2.14) dans tout le secteur :

$$\theta_1 \leq \arg(\lambda) \leq \theta_2,$$

et en particulier pour $\arg(\lambda) = \theta$. Or le théorème (2.1.2) dit que

$$\Delta(\theta, 0) \subset \mathbb{C} \setminus S_L,$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse du théorème (2.1.3). $\square$

Preuve du théorème (2.1.4) : D'après le théorème (2.1.2) il existe $\rho_0 > 0$ tel que :

$$\|L(\lambda)^{-1}\|_{(\mathcal{H},D(H_0))} = \mathcal{O}(1), \quad |\lambda| \to +\infty, \;\; \lambda \in \cup_{j=1}^s \Delta(\theta_j, \rho_0).$$

On applique alors le proposition (1.2.5) avec $p = \dfrac{2n(m+\ell)}{m\ell}$. $\square$

2.2 Application

On commence par mettre en évidence quelques difficultés dans l'application du principe de Phragmén-Lindelöf, et puis on établit quelques résultats qui permettent de surmonter ces difficultés. On étudie ensuite quelques exemples de familles quadratiques d'opérateurs homogènes dans le cas $n = 1$.

2.2.1 Difficultés

On présente un exemple où l'application du principe de Phragmén-Lindelöf ne permet pas de montrer l'existence de valeurs propres en utilisant la technique de rayons de croissance minimale.

Exemple 2.2.1. *On considère l'opérateur suivant :*

$$Au = \frac{du}{dt},$$

où

$$D(A) = \{u \in H^1(]0,1[), u(0) = 0\}.$$

On a

$$A^{-1}v(x) = \int_0^x v(t)dt,$$

qui est un opérateur de Volterra qui est compact et n'a pas de valeurs propres (tout Volterra opérateur est un opérateur quasi-nilpotent de spectre $\{0\}$*). De plus, si* $u \in D(A)$*, l'image numérique de* A *est*

$$\Re\langle Au, u\rangle = \frac{|u|^2}{2},$$

d'où l'image numérique de A *est le demi-plan d'axe réel positif. Par suite les rayons de croissance minimale se trouvent dans le demi-plan d'axe réel négatif. Pour* $s \in]0,1[$*, on définit*

$$A^s = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \lambda^s(A-\lambda)d\lambda,$$

où Γ *est un contour qui commence à l'infini et qui passe par tout le long du rayon de croissance minimale et puis par un cercle dans le sens des aiguilles d'une montre et retourne à l'infini au long du rayon. Pour tout* $u \in D(A^s)$ *on a :*

$$|Arg\langle A^s u, u\rangle| \leq \frac{s\pi}{2}.$$

La suite des valeurs propres de $(A^{s*}\ A^s)^{-\frac{1}{2}}$ *est d'ordre* $\frac{1}{n^s}$*. De plus la condition d'ouverture est inférieur de* $s\pi$ *qui est trop petit, d'où le principe de Phragmén-Lindelöf ne s'applique pas.*

Remarque 2.2.1. *L'exemple précédent met en évidence la difficulté de montrer l'existence de valeurs propres en utilisant la téchnique des rayons de croissance minimale.*

La condition d'ouverture du théorème (2.1.4) est beaucoup plus difficile à réaliser pour le cas $n > 1$.

Remarque 2.2.2. *Pour la famille suivante d'opérateurs :*

$$L(\lambda) = -\Delta + (P(x) - \lambda)^2, x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.15}$$

Si P est un polynôme homogène de degré M, on a la condition suivante d'ouverture :

$$\theta < \frac{M\pi}{n(M+1)},$$

alors pour n grand on a besoin de l'estimation de la résolvente pour des rayons plus proches, ce qui n'est pas évident à réaliser.

2.2.2 Quelques résultats

Pour surmonter les difficultés, on établit les résultats suivants, qui permettent dans certain cas d'appliquer le principe de Phragmén-Lindelöf.

On commence par donner la définition suivante.

Définition 2.2.1. *Pour $\theta \in [0, 2\pi[$, $\rho_0 \geq 0$, on dit que $\Delta(\theta, \rho_0)$ est un rayon de croissance polynomiale pour la famille d'opérateurs $L(\lambda)$ s'il existe une constante $C > 0$ et un entier $N > 0$ tels que :*

$$\|L^{-1}(\rho e^{i\theta})\| \leq C\rho^N,$$

pour tout $\rho \geq \rho_0$.

La proposition suivante permet d'appliquer le théorème de Pham-Robert pour la famille $L(\lambda)$ donné par (2.15) lorsque $1 < p < 2$.
On a le résultat direct suivant.

Proposition 2.2.1. *Si*

$$L_P(\lambda) = -\Delta + (P(x) - \lambda)^2 \ , \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où P est un polynôme homogène de degré $M \geq 2$. Alors la direction réelle positive est un rayon de croissance polynomiale pour la famille $L(\lambda)$.

On a besoin du résultat suivant.

Lemme 2.2.1. *Si $u \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ et $L(\lambda)u = 0$, alors $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve :
On considère l'opérateur $L(\lambda) = -\Delta + (P(x) - \lambda)^2$, où $P(x)$ est un polynôme homogène de degré M. On écrit $L(\lambda)$ sous la forme

$$L(\lambda) = H_0 + K,$$

où $H_0 = -\Delta + P(x)^2$ et $K = \lambda^2 + 2\lambda P(x)$. Le symbole, $L(\lambda, x, \xi)$, de $L(\lambda)$ est de classe $\mathcal{S}^m_{\phi,\varphi}$ avec

$$\begin{aligned} m(x,\xi) &= (|\xi|^2 + |x|^{2M} + 1)^{\frac{1}{2}}, \\ \phi(x,\xi) = \varphi(x,\xi) &= (|\xi|^2 + |x|^{2M} + 1)^{\frac{1}{2M}}. \end{aligned}$$

En utilisant la définition B.1.3 et le théorème de composition B.1.1, on déduit que $(L(\lambda) + 1)^{-1}$ est un opérateur pseudodifférentiel de symbole principal

$$(\xi^2 + P(x)^2 + 1)^{-1}.$$

le domaine de $(H_0 + 1)^{\frac{m}{2}}$, désigné par B_m, est donné par

$$B_m = \Big\{ u \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n) \ , \ \partial_x^\alpha u \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n) \ , \ |\alpha| \leq k \ , \ |x|^{km} u \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n) \Big\},$$

car le degré de H_0 est plus grand que le degré de K donc

$$(L(\lambda) + 1)^{-1} \in \mathsf{L}(B_m, B_{m+2}), \tag{2.16}$$

et de plus on a

$$\bigcap_{m \geq 1} B_m = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{2.17}$$

On prend $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et on écrit

$$L(\lambda)u = (L(\lambda) + 1)u - u = f,$$

i.e.

$$(L(\lambda) + 1)u = u + f$$

donc

$$u = (L(\lambda) + 1)^{-1}(u + f).$$

On a $u \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n) = B_0$ et $f \in B_0$ (car $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$). Donc $u + f \in B_0$. En utilisant (2.16) on a $u \in B_2$. Maintenant en partant de $u + f \in B_2$ on a alors $u \in B_4$ (pour les mêmes raisons que précédemment). Par récurrence il résulte que $u \in B_m, \forall m$. Par conséquent $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. □

Preuve de la proposition 2.2.1 :

On commence par prouver que $L(\lambda)$ est inversible pour λ appartenant à l'axe réel positif. Pour montrer que L est injectif, on suppose que $L(\lambda)u = 0$, pour $u \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)$. On utilise le lemme 2.2.1 on peut supposer que $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a alors

$$\begin{aligned} 0 &= \langle L(\lambda)u, u \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 d(x) + \int_{\mathbb{R}^n} (P(x) - \lambda)^2 |u(x)|^2 d(x) \end{aligned} \tag{2.18}$$

la première intégrale est obtenue avec une intégration par partie du Laplacien. Les intégrales sont positives donc on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (P(x) - \lambda)^2 |u(x)|^2 dx = 0,$$

la première égalité donne

$$|\nabla u(x)| = 0,$$

d'où u est constante. De plus $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et dans cet espace des fonctions à décroissance rapide, le zéro est la seule fonction constante, donc $u = 0$.

On a

$$L(\lambda)H_0^{-1} = \mathbb{I} + compact,$$

$$H_0^{-1}L(\lambda) = \mathbb{I} + compact,$$

d'où $L(\lambda)$ est à indice avec $Ind(L(\lambda)) = Ind(H_0^{-1}) = 0$. Il résulte que $L(\lambda)$ est surjectif, donc il est inversible.

Pour la majoration de $L^{-1}(\lambda)$ sur l'axe réel positif, on suppose que $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On fait le changement de variables suivant pour calculer l'intégrale en (2.18)

$$y = \lambda^{\frac{1}{M}} x \ , \quad u(x) = v(y),$$

on a alors

$$\begin{aligned} \langle L(\lambda)u, u\rangle &= \lambda^{-\frac{n}{M}+\frac{2}{M}} \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \|\partial_y v(y)\|^2 dy \\ &\quad + \lambda^{2-\frac{n}{M}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (P(y)-1)^2 |v(y)|^2 dy, \end{aligned}$$

parce que λ appartient à l'axe réel positif alors pour tout $\lambda \geq 1$, il existe $\tilde{N} > 0$, $C_1 > 0$ tels que :

$$\langle L(\lambda)u, u\rangle \ \geq \ C_1 \lambda^{\tilde{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[\|\partial_y v(y)\|^2 + (P(y)-1)^2 |v(y)|^2 \right] dy \right),$$

l'intégrale à droite est positive, et on pose

$$Q = -\Delta + (P(x)-1)^2,$$

on a

$$\langle Qv, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \|\partial_y v(y)\|^2 dy + \int_{\mathbb{R}^n} (P(y)-1)^2 |v(y)|^2 dy,$$

il existe alors $C_2 > 0$ tel que :

$$\inf_{v\in\mathcal{S}}\langle Qv, v\rangle \geq C_2\|v\|^2_{\mathsf{L}^2}$$

$$\geq C_2\|u\|^2_{\mathsf{L}^2}\lambda^{\frac{n}{M}},$$

d'où on a

$$\langle L(\lambda)u, u\rangle \;\geq\; C_1\, C_2\, \lambda^{(\tilde{N}+\frac{n}{M})}\, \|u\|^2_{\mathsf{L}^2}, \tag{2.19}$$

d'autre part en utilisant l'inégalité Cauchy-Schwarz on a

$$\langle L(\lambda)u, u\rangle \;\leq\; \|L(\lambda)u\|\, \|u\|_{\mathsf{L}^2}, \tag{2.20}$$

on pose

$$N \;=\; \tilde{N} + \frac{n}{M},$$

$$C \;=\; (C_1C_2)^{-1},$$

les inégalités (2.19) et (2.20) donnent

$$\lambda^{-N}\|u\|_{\mathsf{L}^2} \leq C\|L(\lambda)u\|\,, \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

on prend $w = L(\lambda)u$ i.e $u = L^{-1}(\lambda)w$ on obtient

$$\|L^{-1}(\lambda)w\| \leq C\lambda^N\|w\|\,, \quad \forall w \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n),$$

ce qui achève la démonstration. □

2.2.3 Exemple d'une famille d'opérateurs homogènes

Dans l'exemple suivant on étudie une famille d'opérateurs homogènes qui admet un système de vecteurs propres généralisés total dans $\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$.

Exemple 2.2.2. *On considère la famille suivante d'opérateurs :*

$$L_P(\lambda) = D_x^2 + (P(x) - \lambda)^2, x \in \mathbb{R},$$

où P est un polynôme elliptique tel que :

$$P(x) = a_M x^M + a_{M-1} x^{M-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ , \quad a_M > 0, M \geq 2,$$

le symbole de L a la forme suivante :

$$\xi^2 + (P(x) - \lambda)^2,$$

il s'annule pour les valeurs de λ suivantes :

$$\lambda = P(x) \pm i|\xi|,$$

d'où

$$S_L = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) > 0\}.$$

Donc les rayons de croissance minimale se trouvent dans le demi-plan

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) < 0\}.$$

on a

$$H_0^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{S}^{-1}_{\frac{1}{M},1},$$

en utilisant lemme B.5.1, on a $H_0^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{C}_p$ avec $p = \frac{M+1}{M} + \epsilon$, $\epsilon > 0$.
D'après le principe de Phragmén-Lindelöf

$$\theta < \frac{M\pi}{(M+1)},$$

alors on utilise cette condition pour appliquer le théorème de Pham-Robert.

Pour prouver l'existence de valeurs propres pour cette famille d'opérateurs on donne le résultat suivant.

Proposition 2.2.2. *Pour la famille d'opérateurs*

$$L_P(\lambda) = -\Delta + (P(x) - \lambda)^2 \ , \quad x \in \mathbb{R},$$

où P est un polynôme homogène d'ordre $M \geq 2$, le système de vecteurs propres généralisés de $L_P(\lambda)$ est total dans $\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$.

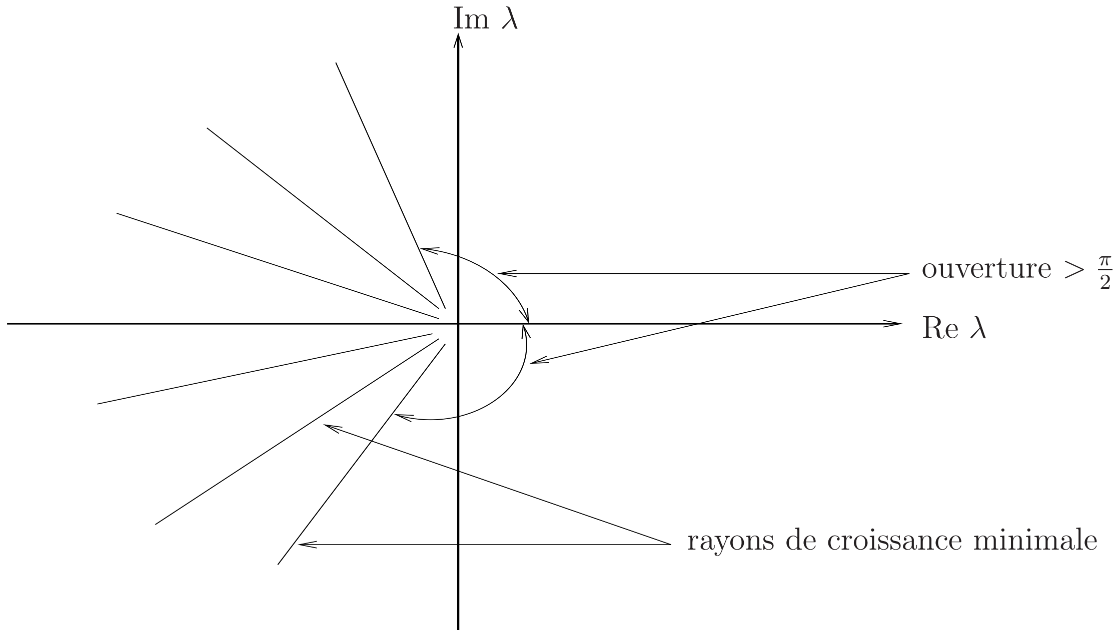

FIG. 2.1 – zone de rayons de croissance minimale.

La preuve de cette proposition est un résultat de la proposition 2.2.1 et du théorème de Pham-Robert car on a $1 < p < 2$ pour $M \geq 2$ où $p = \frac{M+1}{M} + \epsilon$.

Remarque 2.2.3. *Dans cet exemple de dimension* $n = 1$, *la difficulté de petitesse de la condition d'ouverture est surmonté en prouvant que la demi-droite* $\mathbb{R}_+$ *est un rayon de croissance polynomiale pour la famille* $L_P(\lambda)$ *(voir fig.2.1). Pour le cas de dimensions* $n \geq 2$ *on ne peut toujours pas profiter de ce résultat car la condition d'angle est trop restrictive.*

L'exemple suivant explique la raison pour laquelle on a supposé que $M \geq 2$.

Exemple 2.2.3. *On considère la famille suivante d'opérateurs :*

$$L(\lambda) = -\frac{d^2}{dx^2} + (x - \lambda)^2,$$

où $H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$, $H_1 = -2x$. *On a* $L(\lambda)$ *est une famille quadratique d'opérateurs non-bornés dans* $\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ *de domaine*

$$D(L(\lambda)) = \{u \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}), x^2 u \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}), \frac{d^2 u}{dx^2} \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R})\}.$$

Cette famille n'admet pas des solutions non-nulles. Pour la preuve on rappelle le théorème de Fredholm holomorphe.

Théorème 2.2.1. ***(Théorème de Fredholm holomorphe)***
Soit Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$ et

$$F\ :\ \Omega \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

une fonction holomorphe dans Ω à valeur dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. On suppose que $F(z)$ est compacte pour tout $z \in \Omega$. On a alors l'alternative suivante :
(a) $I - F(z)$ est non inversible pour tout $z \in \Omega$.
(b) $(I - F(z))^{-1}$ existe pour tout $z \in \Omega \setminus S$ ou S est une partie discrète de Ω, i.e. une partie qui n'admet aucun point adhérant dans Ω. Dans ce cas $(I - F(z))^{-1}$ est méromorphe dans Ω, holomorphe dans $\Omega \setminus S$, le résidu dans les pôles sont des opérateurs de rang fini, et si $z \in S$ alors $F(z)\psi = \psi$ admet une solution non nulle dans $\mathcal{H}$.

On considère la famille suivante d'opérateurs :

$$L(\lambda) = -\frac{d^2}{dx^2} + (x - \lambda)^2.$$

cette famille d'opérateurs n'admet pas des valeurs propres.
On prouve par l'absurde. On suppose qu'il existe une valeur propre λ_0 telle que $L(\lambda_0)u_0 = 0$.
On a

$$\lambda_0 = r_0 + is_0\ ,\quad r_0, s_0 \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$-\frac{d^2u_0}{dx^2} + (x - r_0 + is_0)^2 u_0 = 0.$$

Soit $r \in R$, on fait le changement de variable suivant :

$$y = x - r\ ,\quad v_0(y) = u_0(y + r - r_0),$$

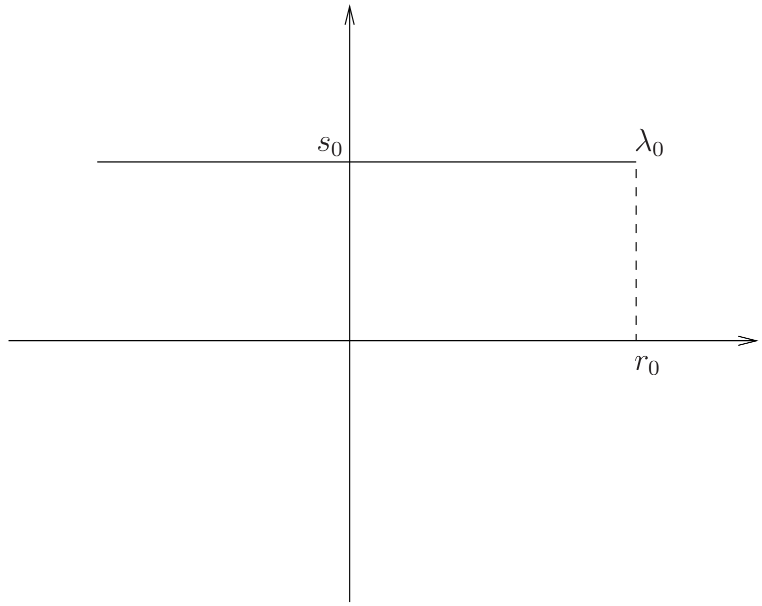

Fig. 2.2 – La valeurs propres λ_0

d'où

$$-\frac{d^2v_0}{dx^2} + (y - (r_0 - r + is_0))^2 v_0 = 0,$$

i.e. $L(r_0 - r + is_0)v_0 = 0$. Alors on a trouvé que si λ_0 est une valeur propre alors $\lambda_0 - r$ est aussi une valeur propre pour tout $r \in \mathbb{R}$ (c.f. fig.2.2). On a :

$$L(\lambda) = L(0)\left(1 - L^{-1}(0)\left(L(0) - L(\lambda)\right)\right).$$

On applique le théorème de Fredholm holomorphe avec $F(\lambda)$ de sort que :

$$F(\lambda) = L^{-1}(0)\left(L(0) - L(\lambda)\right),$$

on a $L^{-1}(0)$ est compacte, donc $F(\lambda)$ est compacte pour tout λ, de plus il est holomorphe, on a prouvé ce que si λ_0 est une valeur propre alors $L(\lambda)$ n'est pas inversible sur tout un demi droit, d'où on obtient une contradiction avec le théorème de Fredholm holomorphe. $\square$

3

Existence de valeurs propres non-linéaires par la méthode des traces

Sommaire

Ce chapitre présente la méthode de Chanillo-Helffer-Laptev [8] et un rappel du théorème de Lidskii. Ce théorème donne une relation entre la trace et le spectre d'un opérateur T de classe trace :

$$Tr(T) = \sum_{\lambda_j(T)\in\sigma(T)} \lambda_j(T),$$

où $\lambda_j(T)$, $\sigma(T)$ désignent les valeurs propres de T et le spectre de T.

Ce résultat est bien connu si T est de rang fini. Il est non trivial pour un opérateur de classe trace quelconque.

Chanillo, Helffer et Laptev ont utilisé le théorème de Lidskii avec des inégalités des traces pour prouver l'existence de solutions non nulles pour des problèmes de valeurs propres non-linéaires.

Ensuite on donne des exemples de familles d'opérateurs homogènes dans les cas $n = 1, 2$.

3.1 Théorème de Lidskii

Soit T un opérateur compact sur $\mathcal{H}$, où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert séparable. Si $r(T) \neq 0$ (rayon spectral) on ordonne les valeurs propres non nulles de T en une suite décroissante en module $|\lambda_1(T)| \geq |\lambda_2(T)| \geq ... \geq |\lambda_n(T)| \geq ...$, chaque valeur propre étant répétée suivant sa multiplicité algébrique.

Pour prouver l'existence de valeurs propres non nulles nous utilisons le théorème suivant (pour la preuve voir A.1).

Théorème 3.1.1. ***Théorème de Lidskii (1958)***
Pour tout $T \in \mathcal{C}^1(\mathcal{H})$ on a $Tr(T) = \sum_{j\geq 1} \lambda_j(T)$.

On en déduit directement le corollaire suivant.

Corollaire 3.1.1. *S'il existe $k \geq 1$ tel que $Tr(T^k) \neq 0$, alors $\sigma(T) \neq \{0\}$.*

3.2 Mise en œuvre de la méthode des traces

La méthode des traces est l'une des méthodes utilisées pour prouver l'existence de valeurs propres pour des familles polynomiales d'opérateurs. Cette méthode consiste à étudier la trace de familles d'opérateurs et à utiliser le théorème de Lidskii pour prouver l'existence des valeurs propres non nulles. En effet le théorème de Lidskii donne la relation entre la trace et le spectre d'un opérateur car d'après ce théorème la trace d'un opérateur est la somme des valeurs propres de cette opérateur, donc si on arrive à prouver que la trace d'une famille d'opérateurs est non nulle, alors on arrive à prouver que le spectre de cette famille d'opérateurs contient des valeurs propres non nulles.

On considère la famille suivante d'opérateurs quadratiques :

$$L(\lambda) = H_0 + \lambda H_1 + \lambda^2, \tag{3.1}$$

où H_0, H_1 sont des opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, qui vérifient les hypothèses (1), (2), (3), (4) du chapitre 1 et les hypothèses (QH), (E), (C) du chapitre **??**.

L'opérateur matriciel de linéarisation associé à $L(\lambda)$ est le suivant :

$$\mathcal{A}_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -H_0 & -H_1 \end{pmatrix}.$$

La méthode de Chanillo-Helffer-Laptev est basée sur de calculs des traces de certains opérateurs matriciels de linéarisation (c.f. [8]).

On calcule la trace de $(\mathcal{A}_L + \tau)^{-k}$, pour $\tau > 0$. On rappelle que, d'après (1.19), $(\mathcal{A}_L + \tau)^{-1}$ est de la forme

$$(\mathcal{A}_L + \tau)^{-1} = \begin{pmatrix} -L(\tau)^{-1}(H_1 + \tau) & -L(\tau)^{-1} \\ -L(\tau)^{-1}(-L(\tau) + \tau(H_1 + \tau)) & -\tau L(\tau)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

On rappelle les résultats du chapitre 1 sur la coïncidence des spectres de la famille d'opérateurs $L(\lambda)$ et la famille matricielle de linéarisation $\mathcal{A}_L$ associée à cette famille.

Pour calculer la trace d'un opérateur matriciel on donne le lemme suivant.

Lemme 3.2.1. *Soit $\mathcal{D}$ un opérateur matriciel défini dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ de classe trace tel que :*

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} \\ D_{2,1} & D_{2,2} \end{pmatrix}$$

Alors $Tr(\mathcal{D}) = Tr\,(D_{1,1}) + Tr\,(D_{2,2})$.

Preuve :

Soit $\{e_i\}_{i\geq 1}$ la base orthonormée de $\mathcal{H}$, alors la base orthonormée de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ est $\left\{e_i^{(j)}\right\}_{i\geq 1, j=1,2}$ telle que :

$$e_i^{(1)} = \begin{pmatrix} e_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i \geq 1$$

$$e_i^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ e_i \end{pmatrix}, \quad i \geq 1.$$

la trace de $\mathcal{D}$ est

$$\begin{aligned} Tr(\mathcal{D}) &= \sum_{i\geq 1, j=1,2} \langle \mathcal{D} e_i^{(j)}, e_i^{(j)} \rangle \\ &= \sum_{i\geq 1} \langle \begin{pmatrix} D_{1,1}e_i \\ D_{2,1}e_i \end{pmatrix}, e_i^{(1)} \rangle + \sum_{i\geq 1} \langle \begin{pmatrix} D_{1,2}e_i \\ D_{2,2}e_i \end{pmatrix}, e_i^{(2)} \rangle \\ &= \sum_{i\geq 1} \langle D_{1,1}e_i, e_i \rangle + \sum_{i\geq 1} \langle D_{2,2}e_i, e_i \rangle \\ &= Tr\left(D_{1,1}\right) + Tr\left(D_{2,2}\right). \end{aligned}$$

□

Pour calculer la paramétrix de $(\mathcal{A}_L + \tau)^k$ on aura besoin de beaucoup de calculs pour $k \geq 2$. Dans le lemme suivant on donne la relation entre certaines puissances de l'opérateur matriciel $(\mathcal{A}_L + \tau)^{-1}$ et certaines dérivées de cet opérateur.

Lemme 3.2.2. *Pour $k \geq 1$ on a*

$$(\mathcal{A}_L + \tau)^{-(k+1)} = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{d\tau^k} \left[(\mathcal{A}_L + \tau)^{-1} \right].$$

Preuve :

On fait un raisonnement par récurrence. Pour $k = 1$ on a :

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{d\tau}(\mathcal{A}_L - \tau)^{-1} &= (\mathcal{A}_L - \tau)^{-1} \frac{d(\mathcal{A}_L - \tau)}{d\tau} (\mathcal{A}_L - \tau)^{-1} \\ &= (\mathcal{A}_L - \tau)^{-2} \end{aligned}$$

où

$$\frac{d(\mathcal{A}_L - \tau)}{d\tau} = 1,$$

alors la relation est vérifiée pour $k = 1$.

On suppose que la relation est vraie pour $k = j$ et on prouve qu'elle est vraie pour $k = j + 1$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{d^{j+1}}{d\tau^{j+1}}(\mathcal{A}_L - \tau)^{-1} &= \frac{d}{d\tau}\left[\frac{d^j}{d\tau^j}(\mathcal{A}_L - \tau)^{-1}\right] \\
&= \frac{d}{d\tau}\left[j!(\mathcal{A}_L - \tau)^{-(j+1)}\right] \\
&= j!\frac{d}{d\tau}\left[(\mathcal{A}_L - \tau)^{-1}\right](\mathcal{A}_L - \tau)^{-j} \\
&\quad +j!(\mathcal{A}_L - \tau)^{-1}\frac{d}{d\tau}\left[(\mathcal{A}_L - \tau)^{-1}\right](\mathcal{A}_L - \tau)^{-(j-1)} \\
&\quad + \cdots + j!(\mathcal{A}_L - \tau)^{-j}\frac{d}{d\tau}\left[(\mathcal{A}_L - \tau)^{-1}\right]
\end{aligned}$$

on a $j + 1$ fois la somme du même terme donc

$$\frac{d^{j+1}}{d\tau^{j+1}}(\mathcal{A}_L - \tau)^{-1} = (j+1)!(\mathcal{A}_L - \tau)^{-(j+2)}.$$

□

Le théorème suivant donne une condition suffisante d'existence de solutions non nulles pour la famille d'opérateurs $L(\lambda)$ en utilisant la méthode des traces.

Théorème 3.2.1. *Soit $L(\lambda)$ la famille d'opérateurs définie dans (3.1) tel que :*

$$\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\left[L(\tau)^{-1}L'(\tau)\right]$$

soit de classe trace où $L' = \frac{dL(\tau)}{d\tau}$. S'il existe $k \geq 1$ tel que :

$$Tr\left(\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\left[-L(\tau)^{-1}L'(\tau)\right]\right) \neq 0, \tag{3.3}$$

alors il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $u_0 \in D(H_0)$, $u_0 \neq 0$ tels que $L(\lambda_0)u_0 = 0$.

Preuve :

En utilisant le lemme 3.2.2 on a

$$Tr(\mathcal{A} - \tau)^{-k} = Tr\left(\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\left[(\mathcal{A} - \tau)^{-1}\right]\right).$$

$$\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\left((\mathcal{A}-\tau)^{-1}\right)=\begin{pmatrix} \frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\left[-L(\tau)^{-1}(H_1+\tau)\right] & \frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\left[-L(\tau)^{-1}\right] \\ \frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\left[-L(\tau)^{-1}(-L(\tau)+\tau(H_1+\tau))\right] & \frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\left[-\tau L(\tau)^{-1}\right] \end{pmatrix}.$$

D'après le lemme 3.2.1, la trace d'un opérateur matriciel est la somme des traces des termes de la diagonale donc

$$\begin{aligned}(k-1)!Tr(\mathcal{A}-\tau)^{-k} &= Tr\left(\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\left[-L(\tau)^{-1}(H_1+\tau)\right]\right)+Tr\left(\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\left[-\tau L(\tau)^{-1}\right]\right)\\ &= Tr\left(\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\left[-L(\tau)^{-1}(H_1+2\tau)\right]\right)\\ &= Tr\left(\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\left[-L(\tau)^{-1}\frac{dL(\tau)}{d\tau}\right]\right).\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (3.3) du théorème il existe alors $k \geq 1$ tel que :

$$Tr(\mathcal{A}_L-\tau)^{-k}\neq 0$$

En utilisant donc le corollaire 3.1.1, on a pour le spectre, $\sigma((\mathcal{A}_L-\tau)^{-1})\neq\{0\}$, on obtient le résultat du fait que les spectres de $L(\lambda)$ et $\mathcal{A}_L$ coïncident. □

3.2.1 Critères de Chanillo-Helffer-Laptev

Les critères de Chanillo-Helffer-Laptev sont des conséquences directes du théorème de Lidskii. Ces critères sont appliqués pour les familles d'opérateurs $L_P(\lambda)$ suivantes :

$$L(\lambda)=-\Delta+(P(x)-\lambda)^2, x\in\mathbb{R}^n, \tag{3.4}$$

où P est un polynôme homogène de degré m avec $m>1$ et $n\leq 3$.

Nous donnons maintenant ces critères (avec des formes différents de celles de Chanillo-Helffer-Laptev) pour montrer l'existence de solutions non nulles pour la famille d'opérateurs $L(\lambda)$.

On commence par donner le critère de rang 2 pour la famille quadratique dans (3.4), qui s'écrit sous la forme (3.1) avec

$$\begin{aligned} H_0 &= -\Delta + P(x)^2, \\ H_1 &= 2P(x). \end{aligned}$$

Si on pose $V = (P(x) - \tau)^2$, et alors $L(\tau)^{-1} = (-\Delta + V)^{-1}$, on a le résultat suivant.

Proposition 3.2.1. ***(Critère de Rang** 2**)***
Pour la famille d'opérateurs (3.4), si $(-\Delta+V)^{-1}\sqrt{V}$ est de classe Hilbert Schmidt et $(-\Delta + V)^{-1}$ est positif et de classe trace et si la condition

$$Tr\left((-\Delta + V)^{-1}\right) - 2Tr\left((-\Delta + V)^{-1}V(-\Delta + V)^{-1}\right) > 0, \tag{3.5}$$

est satisfaite, alors $L(\lambda)$ a au moins une valeur propre non nulle.

Preuve :

On commence par montrer que la condition (3.5) est équivalente à la condition (3.3) du théorème 3.2.1 avec $k = 2$.
On vérifie alors la condition suivante :

$$Tr\left(\frac{d}{d\tau}\left[-L(\tau)^{-1}L'(\tau)\right]\right) \neq 0, \tag{3.6}$$

on a

$$\frac{d}{d\tau}\left[-L(\tau)^{-1}L'(\tau)\right] = \left(L(\tau)^{-1}L'(\tau)\right)^2 - 2L(\tau)^{-1},$$

de l'hypothèse de proposition on a $L(\tau)^{-1}L'(\tau)$ est de classe Hilbert-Schmidt alors en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\begin{aligned} Tr\left(L(\tau)^{-1}L'(\tau)\right)^2 &= \langle L(\tau)^{-1}L'(\tau), (L(\tau)^{-1}L'(\tau))^*\rangle_{H.S} \\ &\leq \|L(\tau)^{-1}L'(\tau)\|_{H.S}\|(L(\tau)^{-1}L'(\tau))^*\|_{H.S} \\ &= Tr\left(L(\tau)^{-1}L'(\tau)(L(\tau)^{-1}L'(\tau))^*\right) \\ &= Tr\left(L(\tau)^{-1}(L'(\tau))^2L(\tau)^{-1}\right), \end{aligned}$$

pour la famille quadratique (3.4) on a

$$\begin{aligned} (L'(\tau))^2 &= 4(P(x)+\tau)^2, \\ &= 4V \end{aligned}$$

où $V = (P+\tau)^2$. Alors on a

$$Tr\left(\frac{d}{d\tau}\left[L(\tau)^{-1}L'(\tau)\right]\right) \geq 2Tr(L(\tau)^{-1}) - 4Tr(L(\tau)^{-1}(P(x)+\tau)^2 L(\tau)^{-1}),$$

la condition (3.6) est équivalente à la condition suivante :

$$Tr((-\Delta+V)^{-1}) - 2Tr((-\Delta+V)^{-1}(P(x)+\tau)^2(-\Delta+V)^{-1}) > 0.$$

D'où la condition (3.6) est vérifiée, donc grâce au théorème (3.2.1) la démonstration est achevée. □

On énonce le critère de rang 3.

Proposition 3.2.2. ***(Critère de Rang** 3**)***
Pour la famille d'opérateurs dans (3.4). Si $(L^{-1}(\tau))^{\frac{3}{2}}$, $(L^{-1}L')^3$ sont de classe trace et si la condition

$$-Tr\left(\left(\frac{d}{d\tau}\left[L^{-1}(\tau)\right]\right)L'(\tau)L^{-1}(\tau)L'(\tau)\right) + 3Tr\left(\frac{d}{d\tau}\left[L^{-1}(\tau)\right]\right) \neq 0, \tag{3.7}$$

est satisfaite, alors $L(\lambda)$ a au moins une valeur propre non nulle.

Preuve :

En admettant l'hypothèse de cette proposition on a

$$Tr\left(\frac{d^2}{d\tau^2}\left[-L(\tau)^{-1}L'(\tau)\right]\right) \neq 0,$$

car

$$Tr\left(\frac{d^2}{d\tau^2}\left[-L(\tau)^{-1}L'(\tau)\right]\right) = -2Tr\left((L(\tau)^{-1}L'(\tau))^3\right) + 6Tr\left(L(\tau)^{-1}L'(\tau)L(\tau)^{-1}\right),$$

en appliquant alors le théorème (3.2.1) avec $k = 3$ on a le résultat. □

Pour le critère de rang 4, on va utiliser le théorème (3.2.1) pour $k = 4$.

Proposition 3.2.3. ***(Critère de Rang** 4)*

Pour la famille d'opérateurs dans (3.4). On suppose que

$$\left(L^{-1}(\tau)L'(\tau)\right)^2 \ , \quad L^{-1}(\tau),$$

sont de classe Hilbert-Schmidt. Si

$$Tr\left(8\left(L^{-1}(\tau)(P+\tau)\right)^4 - 8\left(L^{-1}(\tau)(P+\tau)\right)^2 L^{-1}(\tau) + \left(L^{-1}(\tau)\right)^2\right) \neq 0. \quad (3.8)$$

est satisfaite, alors $L(\lambda)$ a au moins une valeur propre non nulle.

3.2.2 L'exemple de Pham The Lai-Robert

Appliquons la méthode précédante à l'exemple :

$$L(\lambda) = D_t^2 + (t^m - \lambda)^2, \quad t \in \mathbb{R}, m \geq 2.$$

Pour prouver l'existence de solutions, Pham et Robert [25], ont trouvé les rayons de croissance minimale et les secteurs de plan complexe dans lesquelles se trouvent les valeurs propres et ont prouvé que le système des vecteurs propres généralisés de $L_\lambda(t)$ est total dans $L^2(\mathbb{R})$ pour m pair. Chanillo-Helffer-Laptev [8], ont étudié cet exemple et ont prouvé (pour tout $m \geq 2$) le théorème suivant en utilisant la méthode des traces :

Théorème 3.2.2. *Si $m > 1$, le problème :*

$$(D_t^2 + (t^m - \lambda)^2)f = 0,$$

a une solution (λ, f) avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, $f \not\equiv 0$.

La preuve consiste à faire une déformation isospectrale.
On définit l'opérateur :

$$A_\gamma = (-\Delta + \gamma P^2)^{-1}, A_1 = A, B = A^{\frac{1}{2}} P A^{\frac{1}{2}}, \gamma > 0.$$

où A et P sont des opérateurs autoadjoints tels que A soit positif et P soit homogène de degré m. Sous ces conditions on a le lemme suivant.

Lemme 3.2.3. *A_γ est isospectral à $\gamma^{-\frac{1}{m+1}}A_1$.*

Il en résulte que l'on a

$$Tr(A_\gamma^l) = \gamma^{-\frac{l}{m+1}} Tr(A^l).$$

où A_γ^l et A_l sont de classe trace.

Preuve du théorème 3.2.2 :

On pose

$$H_0 = (D_t^2 + t^{2m}) , \quad H_1 = -2t^m.$$

On applique le critère de rang 2, avec $\lambda = 0$ et $V = t^{2m}$ et au lieu de $-\Delta$ on a D_t^2, sur :

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -H_0 & -H_1 \end{pmatrix}.$$

Pour appliquer le corollaire (3.2.1), on utilise le lemme B.5.1 on a que $H_0^{-1}H_1$ est de classe Hilbert Schmidt et H_0^{-1} est de classe trace pour $m > 1$. H_0^{-1} est autoadjoint positif et donc $Tr(H_0^{-1}) > 0$.

On utilise le changement de variable $u = \gamma^{\frac{1}{2(m+1)}}t$, on trouve qu'il existe un opérateur unitaire $U \in \mathcal{L}(\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n) \times \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n))$ tel que :

$$U(D_t^2 + \gamma t^{2m})U^* = \gamma^{\frac{1}{m+1}}(D_t^2 + t^{2m}).$$

Alors du lemme 3.2.3 on a

$$(D_t^2 + \gamma t^{2m})$$

qui est isospectral à

$$\gamma^{\frac{1}{m+1}}(D_t^2 + t^{2m}).$$

D'où

$$Tr(D_t^2 + \gamma t^{2m})^{-1} = \gamma^{\frac{-1}{m+1}} Tr(D_t^2 + t^{2m})^{-1},$$

On dérive par rapport à γ et on prend $\gamma = 1$, on a

$$\frac{1}{m+1} Tr((D_t^2 + t^{2m})^{-1}) = Tr((D_t^2 + t^{2m})^{-1} t^{2m} (D_t^2 + t^{2m})^{-1}). \tag{3.9}$$

alors la condition (3.5)

$$Tr\left((D_t^2 + t^{2m})^{-1}\right) - 2Tr\left((D_t^2 + t^{2m})^{-1} V (D_t^2 + t^{2m})^{-1}\right) \quad > \quad 0,$$

devient

$$(1 - \tfrac{2}{m+1}) Tr\left((D_t^2 + t^{2m})^{-1}\right) \quad > \quad 0,$$

qui est satisfaite lorsque $m > 1$. □

On note que la condition m pair n'est plus nécessaire pour appliquer le théorème (3.2.2) (comme le résultat de Pham-Robert), par cette méthode il suffit de supposer que $m > 1$.

3.2.3 Exemple dans $\mathbb{R}^2$

On considère l'exemple suivant :

$$L_P(\lambda) = -\Delta + (P(x,y) - \lambda)^2, \ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.10}$$

où $P(x,y) = x^4 + y^4$. On applique le critère de rang 3, (3.7), avec $\tau = 0$. On a P qui est homogène d'ordre 4, alors

$$(-\Delta + P^2)^{-1} P^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{S}^{-\frac{3}{2}}_{\frac{1}{4},1}$$

$$\left[(-\Delta + P^2)^{-1} P\right]^3 \in \mathcal{S}^{-3}_{\frac{1}{4},1}$$

en utilisant le lemme B.5.1 on a

$$(-\Delta + P^2)^{-1} P^{\frac{1}{2}},$$

est de classe Hilbert-Schmidt et

$$\left[(-\Delta + P^2)^{-1} P\right]^3,$$

est de classe trace. Pour appliquer le critère de rang 3 on prouve le lemme suivant en rappelant que

$$A_\gamma = (-\Delta + \gamma P^2)^{-1},$$

et

$$A = (-\Delta + P^2)^{-1}.$$

Lemme 3.2.4. *On suppose que $n = 2$, $m \geq 4$, P est un polynôme homogène elliptique. Alors :*

$$Tr\left((AP)^3\right) \leq \left(2\left(\frac{m+2}{m+1}\right) - 3\right) Tr(PA^2) < 0 \tag{3.11}$$

Preuve :

Les conditions $n = 2$, $m \geq 4$ garantissent que les opérateurs sont de classe trace. On prouve que

$$Tr\left((AP)^3\right) \leq 2\left(\frac{m+2}{m+1}\right) Tr(PA^2). \tag{3.12}$$

On fait le changement de variable $u = \gamma^{\frac{1}{2}\frac{m+2}{m+1}} x$ on a

$$(A_\gamma P)^3,$$

isospectral à

$$\gamma^{-6\left(\frac{m+2}{m+1}\right)} (PA)^3,$$

alors on a

$$Tr\left((A_\gamma P)^3\right) = \gamma^{-6\left(\frac{m+2}{m+1}\right)} Tr(PA)^3,$$

on dérive par rapport à γ et on pose $\gamma = 1$ on a :

$$Tr\left((AP)^3 P^2 A\right) = 2\left(\frac{m+2}{m+1}\right) Tr\left((AP)^3\right), \tag{3.13}$$

Car $P \geq 0$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned} Tr\left((AP)^3\right) &= Tr\left((AP^{\frac{1}{2}})(P^{\frac{1}{2}}APAP)\right) \\ &\leq \left(Tr(AP^{\frac{1}{2}}\,P^{\frac{1}{2}}A)\right)^{\frac{1}{2}} \left(Tr(P^{\frac{1}{2}}APAP\,PAPAP^{\frac{1}{2}})\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(Tr(PA^2)\right)^{\frac{1}{2}} \left(Tr((PA)^3 P^2 A)\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

on utilise (3.13), on obtient

$$Tr\left((AP)^3\right) \leq \left(Tr(PA^2)\right)^{\frac{1}{2}} \left(2\left(\frac{m+2}{m+1}\right) Tr\left((AP)^3\right)\right)^{\frac{1}{2}},$$

On multiplie par :

$$\left(Tr(AP)^3\right)^{\frac{1}{2}},$$

et on prend le carré de l'inégalité on trouve (3.12) et on a alors (3.11), qui est satisfaite lorsque $m \geq 4$. □

P étant homogène, on a la condition (3.11) qui est équivalente à la condition de critère de rang 3, (3.7), alors on a prouvé que le problème en (3.10) a au moins une valeur propre non nulle.

On obtient ainsi le résultat suivant de [8].

Théorème 3.2.3. *Si $n = 2$, $m \geq 4$ et si P est un polynôme homogène elliptique et positif de degré m, alors il existe au moins une valeur propre non nulle λ_0 pour la famille d'opérateurs :*

$$L_P(\lambda) = -\Delta + (P(x) - \lambda)^2, \lambda \in \mathbb{C},$$

avec $u_0 \neq 0$ et $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tels que $L_P(\lambda_0)u_0 = 0$.

4

Famille quadratique d'opérateurs pseudo-différentiels

Sommaire

Dans ce chapitre nous explicitons des hypothèses sur la classe de symboles des familles d'opérateurs quadratiques, ces hypothèses permettent d'obtenir les estimations d'erreurs dans les calculs de paramétrix des opérateurs.
On commence par étudier la famille quadratique $\widehat{L}(\lambda)$, en étudiant les rayons de croissance minimale de cette famille et en calculant la paramétrix de cette famille.
Ensuite nous étudions le système non-autoajoint matriciel obtenu par la linéarisation de la famille quadratique $\widehat{L}(\lambda)$, en calculant la paramétrix en donnant les

estimations d'erreur.

Finallement, nous généralisons ici les résultats de Pham-Robert.

4.1 Hypothèses sur des classes de symboles

On considère la famille quadratique d'opérateurs :

$$\widehat{L}(\lambda) = \widehat{H}_0 + \lambda \widehat{H}_1 + \lambda^2, \tag{4.1}$$

où $\widehat{H}_0$ et $\widehat{H}_1$ sont des opérateurs pseudodifférentiels avec des symboles $H_0(x,\xi)$ et $H_1(x,\xi)$, respectivement, vérifient les hypothèses suivantes :

(HC) $H_0(x,\xi)$, $H_1(x,\xi)$ appartiennent à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, et $H_1(x,\xi) \geq 0$.

Il existe des fonctions poids ϕ, φ, m telles que :

$(HP-1)$ il existe des constantes C, C' telles que :

$$C' m(x,\xi) \leq H_0(x,\xi) \leq C m(x,\xi).$$

$(HP-2)$ Pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, il existe une constante $C_{\alpha\beta}$ telle que :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta H_0(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta} m \varphi^{-|\alpha|} \phi^{-|\beta|}.$$

$(HP-3)$ Pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, il existe une constante $C'_{\alpha\beta}$ telle que :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta H_1(x,\xi)| \leq C'_{\alpha\beta} m^{\frac{1}{2}} \varphi^{-|\alpha|} \phi^{-|\beta|}.$$

Remarque 4.1.1. *Si H_0, H_1 dépendent d'un paramètre ϵ, on suppose que C, C', $C_{\alpha\beta}$, $C'_{\alpha\beta}$ ne dépendent pas du paramètre ϵ. On peut dire dans ce cas que la famille quadratique d'opérateurs $L(\lambda)$ est uniformément hypoelliptique par rapport au paramètre ϵ.*

Maintenant on donne les hypothèses suivantes de coercivité sur les fonctions poids (ϕ, φ).

$(HCoer-1)$ Il existe $C_0>0$, $\epsilon_0>0$ tels que :

$$C_0(1+|x|+|\xi|)^{\epsilon_0} \leq (\phi\varphi)(x,\xi),$$

pour tout $(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}$.

$(HCoer-2)$ Il existe $C_1>0$, $C_2>0$, $\mu>0$, $\mu'>0$ tels que :

$$C_1(\phi\varphi)^{\mu} \leq m \leq C_2(\phi\varphi)^{\mu'},$$

pour tout $(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}$.

On commence par rappeler les définitions suivantes.

Définition 4.1.1. *On dit que le symbole $a(x,\xi)$ est polyhomogène, si $a(x,\xi)$ est de la forme suivante :*

$$a(x,\xi)=\sum_{\ell\in\mathbb{N}} a_{M-\ell}(x,\xi),$$

avec $a_{M-\ell}(x,\xi)$ est homogène de degré $M-\ell$.

Définition 4.1.2. *On dit que le symbole $a(x,\xi)$ est poly-quasi-homogène, si $a(x,\xi)$ est de la forme suivante :*

$$a(x,\xi)=\sum_{\ell\in\mathbb{N}} a_{M-\ell}(x,\xi),$$

avec $a_{M-\ell}(x,\xi)$ est quasi-homogène de degré $M-\ell$.

Définition 4.1.3. *On dit que le symbole $a(x,\xi)$ est quasi-elliptique s'il est poly-quasi-homogène dont le symbole principal ne s'annule pas en dehors de zéro, i.e. :*

$$a_M(x,\xi)\neq 0, \quad pour\ (x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}\setminus\{0\}.$$

Exemple 4.1.1. *On considère la famille quadratique d'opérateurs $\widehat{L}(\lambda)$, de symbole suivant :*

$$L(\lambda,x,\xi)=\xi^2+(P(x)-\lambda)^2,$$

où P un polynôme positif et elliptique. Cette famille est un cas particulier avec

$$\begin{aligned} H_0(x,\xi) &= \xi^2 + P^2(x), \\ H_1(x,\xi) &= -2P(x). \end{aligned}$$

En effet si P est un polynôme de degré M, $M \geq 2$ tel que :

$$P(x) = P_M(x) + P_{M-1}(x) + \cdots + P_0(x),$$

où $P_j(x)$ est de degré j, $j = 0, \cdots, M$. En remplaçant λ par $\lambda - 1$ les hypothèses précédentes sont satisfaites avec

$$\begin{aligned} m(x,\xi) &= (|\xi|^2 + |x|^{2M} + 1)^{\frac{1}{2}} \\ \phi(x,\xi) = \varphi(x,\xi) &= (|\xi|^2 + |x|^{2M} + 1)^{\frac{1}{2M}}. \end{aligned}$$

Remarque 4.1.2. *De la même manière, si $H_0(x,\xi)$ est un symbole quasi-elliptique positif et si $H_1(x,\xi)$ est un symbole quasi-homogène on se ramène au cadre précédent par un choix convenable de fonctions ϕ, φ. On étudiera plus tard des exemples de familles quasi-homogènes.*

Remarque 4.1.3. *Pour la famille polynomiale d'opérateurs :*

$$\widehat{L}(\lambda) = \widehat{H}_0 + \lambda \widehat{H}_1 + \cdots + \lambda^{k-1}\widehat{H}_{k-1} + \lambda^k, \tag{4.2}$$

on fait les même hypothèses précédentes pour l'opérateur $\widehat{H}_0$.
Pour $\widehat{H}_1, \cdots, \widehat{H}_{k-1}$, au lieu de $(HP-3)$, on fait l'hypothèse suivante :
$(HP-3')$ Pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, il existe une constante $C'_{\alpha\beta}$ telle que :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta H_j(x,\xi)| \leq C'_{\alpha\beta} \left(m(x,\xi)\right)^{\frac{k-j}{k}} \varphi^{-|\alpha|}(x,\xi)\phi^{-|\beta|}(x,\xi),$$

pour $j = 1, \cdots, k-1$.

4.2 Rayons de croissance minimale

On étudie maintenant les rayons de croissance polynômiale pour $\widehat{L}^{-1}(\lambda)$. On pose $\lambda = re^{i\theta}$. On a alors

$$\begin{aligned} L(re^{i\theta}, x, \xi) &= H_0(x,\xi) + re^{i\theta}H_1(x,\xi) + r^2e^{2i\theta} \\ &= H_0(x,\xi) + r\cos(\theta)H_1(x,\xi) + r^2\cos(2\theta) + i(r\sin(\theta)H_1(x,\xi) + r^2\sin(2\theta) \end{aligned}$$

On note que $rH_1 \geq 0$. On obtient donc pour $|\theta| \leq \frac{\pi}{4}$

$$|L(re^{i\theta}, x, \xi)|^2 \geq H_0^2 + r^2,$$

On en déduit alors que toute direction θ telle que

$$|\theta - \pi| \leq \frac{\pi}{4} \tag{4.3}$$

est une direction de croissance minimale (c.f. fig.4.1) au sens où

$$\|\widehat{L}(\lambda)\|_{\mathsf{L}^2 \to \mathsf{L}^2} \leq \frac{C}{1 + |\lambda|^2},$$

pour $\lambda = re^{i\theta}$ et θ vérifie (4.3).

On donne le résultat suivant qui est une généralisation de la proposition 2.2.1 pour la famille suivante d'opérateurs :

$$L_P(\lambda) = (-\Delta)^\ell + (P(x) - \lambda)^2\ , \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.4}$$

où P est un polynôme quasi homogène d'ordre M et de type $(k_1, \cdots, k_n)$.

Proposition 4.2.1. *Si $L_P(\lambda)$ est la famille dans (4.4). Alors la direction réelle positive est un rayon de croissance polynomiale pour cette famille.*

La preuve de la proposition 4.2.1 est analogue à celle de la proposition 2.2.1.

Exemple 4.2.1. *Soit $L_P(\lambda)$ la famille d'opérateurs suivante :*

$$L_P(\lambda) = (-\Delta_{x,y})^3 + (|x|^8 + |y|^2 - \lambda)^2, \;\; x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

On a

$$\begin{aligned} H_0(x, y, \xi, \eta) &= |\xi|^6 + |\eta|^6 + (|x|^8 + |y|^2)^2, \\ H_1(x, y, \xi, \eta) &= -2(|x|^8 + |y|^2), \end{aligned}$$

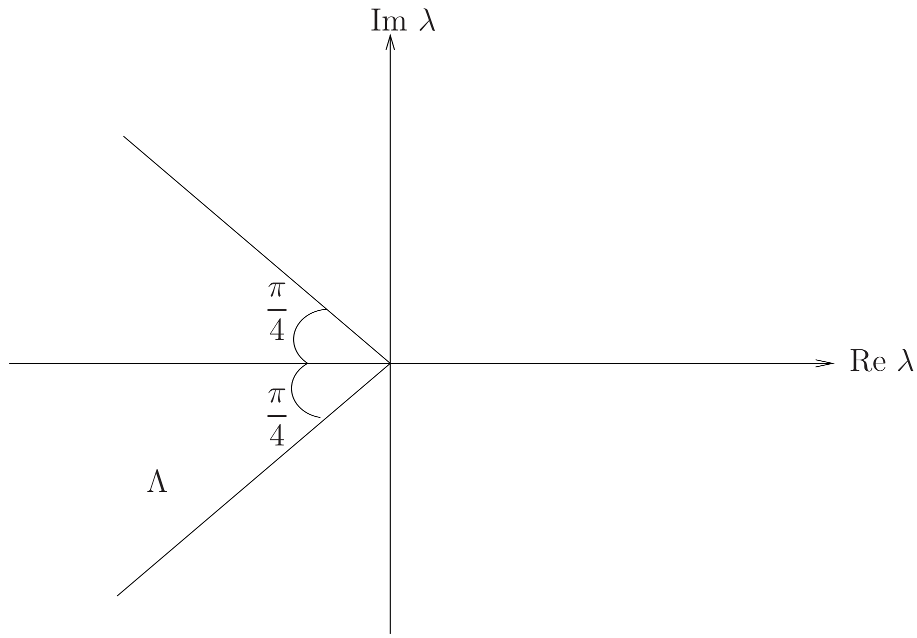

FIG. 4.1 – Zone de rayons de croissance minimale de $\widehat{L}(\lambda)$

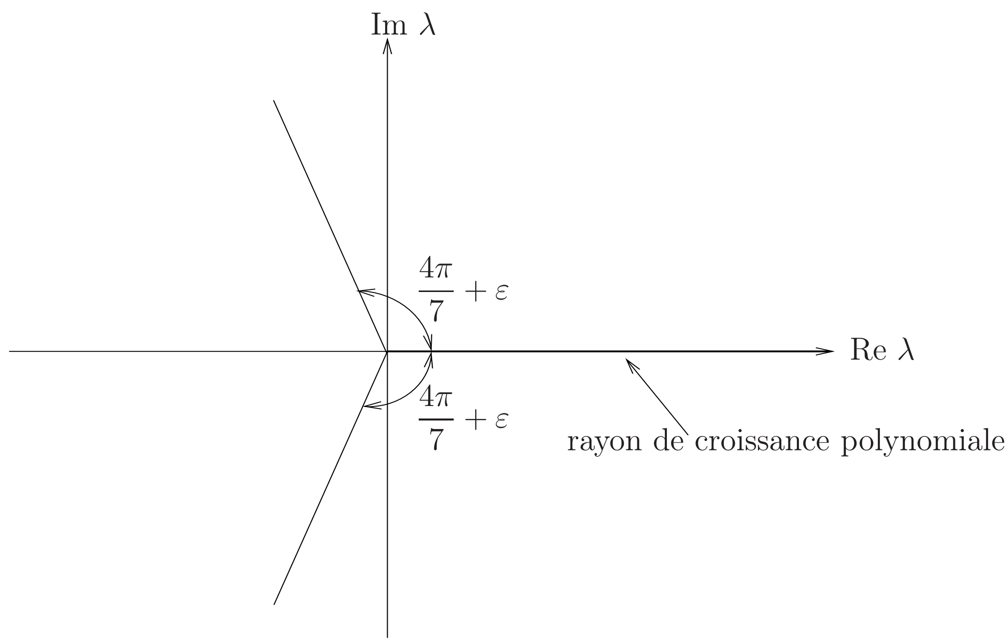

FIG. 4.2 – Zone de rayons de croissance minimale de $L_P(\lambda)$

où $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, *$H_0$ et H_1 sont d'ordre* 2 *et* 1 *respectivement et de type* $(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. *Pour les rayons de croissance minimale de cette famille on utilise les résultats du chapitre* **??**, *l'ensemble S_L est*

$$S_L = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) \geq 0\},$$

car

$$|\xi|^6 + |\eta|^6 + (|x|^8 + |y|^2 - \lambda)^2 = 0,$$

d'où

$$\lambda = |x|^8 + |y|^2 \pm i\sqrt{|\xi|^6 + |\eta|^6}.$$

Donc les rayons de croissance minimale de L_λ se trouvent dans le demi-plan :

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) < 0\}.$$

On a $H_0^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{C}_p$ *avec* $p > \frac{7}{4}$, *on a alors la condition d'ouverture suivante (c.f. fig.4.2) :*

$$\theta < \frac{4\pi}{7}.$$

D'après la proposition 4.2.1, l'axe réel positif est un rayon de croissance polynomiale, d'où en utilisant le théorème de Pham-Robert, le système des vecteurs propres généralisés de $L_P(\lambda)$ *est total dans* $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

4.3 Calculs de paramétrix et estimations des termes d'erreur

On considère la famille quadratique d'opérateurs dans (4.1). On associe à $\widehat{L}(\lambda)$ la famille d'opérateurs matriciels $\widehat{\mathcal{A}_L}$ tels que :

$$\widehat{\mathcal{A}_L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\widehat{H}_0 & -\widehat{H}_1 \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

En effet, on peut faire une translation sur λ et on se ramène donc au cas où le symbole du $\widehat{H}_0$ est minoré par un réel positif, d'où $\widehat{H}_0^{\frac{1}{2}}$ est un opérateur fortement admissible (dans le cadre semi-classique), il en résulte qu'on peut définir la réalisation suivante de l'opérateur de la linéarisation :

$$\widehat{\mathcal{A}_{SL}} = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{H}_0^{\frac{1}{2}} \\ -\widehat{H}_0^{\frac{1}{2}} & -\widehat{H}_1 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Pour étudier le spectre de la famille quadratique on a suivi deux manières, la première est d'étudier directement les pôles de $\lambda \mapsto \widehat{L}^{-1}(\lambda)$ dans le plan complexe, et la deuxième est d'étudier le spectre usuel pour le système linéarisé $\widehat{\mathcal{A}_L}^{-1}$ (ou de même $\widehat{\mathcal{A}_{SL}}^{-1}$). Chacune des deux approches a son intérêt et nous allons donc construire des paramétrix pour chacun des opérateurs $\widehat{L}(\lambda)$ et $\widehat{\mathcal{A}_L}^{-1} - \lambda$.

Pour ces constructions on procède habituellement en deux étapes. On a d'abord une partie algébrique qui consiste à calculer les termes successifs d'un développement asymptotique formel puis une partie d'analyse consistant à démontrer que la première étape fournit bien un développement asymptotique effectif au sens de Poincaré, c'est à dire que l'on a des contrôles uniformes des termes de reste. Autrement dit il s'agit d'estimer l'erreur commise lorsqu'on remplace la quantité à estimer par son approximation.

On commence par détailler la construction de la paramétrix de $\widehat{L}(\lambda)$ et puis après on fait la même chose pour la paramétrix de $(\widehat{\mathcal{A}_{SL}} - \lambda)^{-1}$.

4.3.1 Famille quadratique d'opérateurs $\widehat{L}(\lambda)$

Pour calculer la paramétrix et pour l'estimation d'erreur, on suit un schéma analogue à celui de Dauge-Robert [9], en faisant les adaptations nécessaires. On cherche donc des approximations $\widehat{K^{(N)}}(\tau)$ de $\widehat{L}^{-1}(\tau)$ telles que

$$\widehat{K^{(N)}}(\tau) = \sum_{j=0}^{N} h^j \widehat{K_j}(\tau),$$

où $\widehat{K_j}(\tau)$ a pour h-symbole de Weyl $\widehat{K_j}(\tau, x, \xi)$, $\tau \in \Lambda$, $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, Λ étant un secteur du plan complexe, symètrique par rapport à l'axe réel négatif et d'ouverture inférieure ou égale à $\dfrac{\pi}{2}$, avec

$$\begin{aligned} K_0(\tau, x, \xi) &= \frac{1}{L(\tau, x, \xi)}, \\ K_{2j}(\tau, x, \xi) &= -K_0(\tau, x, \xi) \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=2(j-l) \\ 0 \le l \le j-1}} \Gamma(\alpha, \beta) \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta L(\tau, x, \xi) \partial_\xi^\beta \partial_x^\alpha K_{2l}(\tau, x, \xi), \\ K_{2j+1}(\tau, x, \xi) &= 0\ , \quad \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

On étudie maintenant les termes d'erreur. On rappelle d'abord la formule de composition pour la h-quantification de Weyl (c.f. Dauge-Robert [9], Bouzouina-Robert [7]).

Définition 4.3.1. *Soit $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ deux opérateurs pseudodifferentiels avec des symboles A, B, respectivement. On désigne par $A\#B$ le symbole complet de la composition $\widehat{C}$ de $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ tel que $\widehat{C} = \widehat{A}.\widehat{B}$. Alors*

$$(A\#B)(x, \xi) = \sum_{j=0}^{N} h^j C_j(x, \xi) + h^{N+1} R_N(A, B; x, \xi; h),$$

où $C_j(x, \xi)$ les termes de symbole C de $\widehat{C}$ et R_N est le reste.

Dans la proposition suivante on donne l'estimation du reste.

Proposition 4.3.1. ***(Dauge-Robert)***

Pour tout q, N, il existe $\gamma(q,N)>0$ tel que

$$\left|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta R_N(A,B;x,\xi;h)\right|\leq\gamma(q,N)\sum_{\Upsilon}s_k(A,m_1)s_l(B,m_1)m_1(x,\xi)m_2(x,\xi)(\phi\varphi)^{-N}(x,\xi),$$

avec

$$\Upsilon=\Big\{N\leq k\leq\theta N+M_1+q\ ,\ \ N\leq l\leq\theta N+M_2+q\Big\}$$

où θ, M_1, M_2 ne dépendent que des fonctions poids m_1, m_2, ϕ, φ et $|\alpha|+|\beta|\leq q$, $0<h\leq 1$.

Maintenant, il résulte de la construction de $K_0,K_1,\cdots,K_N$ que l'on a

$$\widehat{L}(\tau).Op_h^wK^{(2N)}(\tau)=1+h^{2N+2}Op_h^w(R^{(2N)}(\tau)),$$

où

$$R^{(2N)}(\tau)=R_{N+2}(L(\tau),K_0(\tau))+R_N(L(\tau),K_2(\tau))+\cdots+R_2(L(\tau),K_N(\tau))$$

En utilisant la relation de récurrence de $K_{2j}(\tau,x,\xi)$ dans (4.8) pour estimer

$$\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta K_{2j}(\tau,x,\xi)$$

on déduit des estimations précises de $\widehat{R^{(N)}}(\tau)$ et on finit par utiliser la relation

$$\widehat{K^{(N)}}(\tau)-\widehat{L}^{-1}(\tau)=h^{2N+2}\widehat{L}^{-1}(\tau).\widehat{R^{(N)}}(\tau)$$

pour mesurer l'erreur en fonction de $h\in]0,1]$ et $\tau\in\Lambda$ lorsqu'on remplace $\widehat{L}^{-1}(\tau)$ par sa paramétrix $\widehat{K^{(N)}}(\tau)$. On commence par étudier

$$\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta K_0(\tau,x,\xi)=\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\left(\frac{1}{L(\tau,x,\xi)}\right).$$

Lemme 4.3.1. *Pour tout $\gamma=(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^{2n}$, on a*

$$\sum_{|(\alpha,\beta)|=1}\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\left(\frac{1}{L(\tau)}\right)=\sum_{1\leq\mu\leq|\gamma|}\ \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+\mu_j=\mu\\ \mu_1|\gamma_1|+\cdots+\mu_j|\gamma_j|=|\gamma|}}C(\alpha_1,\cdots,\alpha_j,\beta_1,\cdots,\beta_j)\frac{(\partial^{(\alpha_1,\beta_1)}L)^{\mu_1}\cdots(\partial^{(\alpha_j,\beta_j)}L)^{\mu_j}}{L^{\mu+1}},\tag{4.9}$$

avec $1\leq j\leq n$ et $\gamma_i=(\alpha_i,\beta_i)$, $1\leq i\leq n$.

Preuve :

Pour $|(\alpha,\beta)| = |\gamma| = 1$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{|(\alpha,\beta)|=1} \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \left(\frac{1}{L(\tau)}\right) &= \partial_\xi \left(\frac{1}{L(\tau)}\right) + \partial_x \left(\frac{1}{L(\tau)}\right) \\ &= -\left(\frac{\partial_\xi L(\tau)}{L^2(\tau)}\right) - \left(\frac{\partial_x L(\tau)}{L^2(\tau)}\right)\end{aligned}$$

alors pour $\gamma_1 = (\alpha_1,\beta_1)$, $|\alpha_1| = 1$, $\beta_1 = 0$ et $\gamma_2 = (\alpha_2,\beta_2)$, $|\alpha_2| = 0$, $|\beta_2| = 1$ on a

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \left(\frac{1}{L(\tau)}\right) = \sum_{\mu=|\gamma|=1} \sum_{\substack{\mu_1=1\\ \mu_1|\gamma_1|=1}} C(1,0)\frac{(\partial^{(\alpha_1,\beta_1)}L)^{\mu_1}}{L^2(\tau)} + \sum_{\mu=|\gamma|=1} \sum_{\substack{\mu_2=1\\ \mu_2|\gamma_2|=1}} C(0,1)\frac{(\partial^{(\alpha_2,\beta_2)}L)^{\mu_2}}{L^2(\tau)}.$$

On suppose que la formule (4.26) est correcte pour $|\gamma| = k$, on la prouve pour $|\gamma| = k+1$. On pose

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \left(\frac{1}{L(\tau)}\right) = \partial_\xi \partial_\xi^{\alpha'} \partial_x^\beta \left(\frac{1}{L(\tau)}\right) + \partial_\xi^\alpha \partial_x \partial_x^{\beta'} \left(\frac{1}{L(\tau)}\right) ,$$

où $|\alpha| = |\alpha'|+1$, $|\beta| = |\beta'|+1$, donc soit $|\gamma'| = |\alpha'+\beta| = k$, soit $|\gamma'| = |\alpha+\beta'| = k$, d'où on a

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \left(\frac{1}{L(\tau)}\right) = \partial_\xi I_1 + \partial_x I_2$$

avec

$$I_1 = \sum_{1\le\mu\le|\gamma'|} \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+\mu_j=\mu\\ \mu_1|\gamma_1'|+\cdots+\mu_j|\gamma_j'|=|\gamma'|}} C(\alpha_1',\cdots,\alpha_j',\beta_1,\cdots,\beta_j)\frac{(\partial^{(\alpha_1',\beta_1)}L)^{\mu_1}\cdots(\partial^{(\alpha_j',\beta_j)}L)^{\mu_j}}{L^{\mu+1}},$$

$$I_2 = \sum_{1\le\mu\le|\gamma'|} \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+\mu_j=\mu\\ \mu_1|\gamma_1'|+\cdots+\mu_j|\gamma_j'|=|\gamma'|}} C(\alpha_1,\cdots,\alpha_j,\beta_1',\cdots,\beta_j')\frac{(\partial^{(\alpha_1,\beta_1')}L)^{\mu_1}\cdots(\partial^{(\alpha_j,\beta_j')}L)^{\mu_j}}{L^{\mu+1}},$$

en calculant les dérivées de I_1, I_2 on obtient

$$\partial_\xi I_1 = \sum_{1\le\mu\le|\gamma'|} \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+\mu_j=\mu \\ \mu_1|\gamma_1'|+\cdots+\mu_j|\gamma_j'|=|\gamma'|}} C(\alpha_1',\cdots,\alpha_j',\beta_1,\cdots,\beta_j)$$
$$\Bigg(\frac{\mu_1(\partial^{(\alpha_1',\beta_1)}L)^{\mu_1-1}(\partial^{(\alpha_1,\beta_1)}L).(\partial^{(\alpha_2',\beta_2)}L)^{\mu_2}\cdots(\partial^{(\alpha_j',\beta_j)}L)^{\mu_j}}{L^{\mu+1}}$$
$$+\frac{(\partial^{(\alpha_1',\beta_1)}L)^{\mu_1}.\mu_2(\partial^{(\alpha_2',\beta_2)}L)^{\mu_2-1}(\partial^{(\alpha_2,\beta_2)}L)\cdots(\partial^{(\alpha_j',\beta_j)}L)^{\mu_j}}{L^{\mu+1}}$$
$$+\cdots+\frac{(\partial^{(\alpha_1',\beta_1)}L)^{\mu_1}.(\partial^{(\alpha_2',\beta_2)}L)^{\mu_2}\cdots(\partial^{(\alpha_j',\beta_j)}L)^{\mu_j-1}(\partial^{(\alpha_j,\beta_j)}L)}{L^{\mu+1}}$$
$$-\frac{(\partial^{(\alpha_1',\beta_1)}L)^{\mu_1}\cdots(\partial^{(\alpha_j',\beta_j)}L)^{\mu_j}(\partial^{(\alpha_0,\beta_0)}L)}{L^{\mu+2}}\Bigg),$$

où $|\alpha_0|=1$, $|\beta_0|=0$. Pour $1\le k\le j$ on pose

$$\Sigma_k = \sum_{1\le\mu\le|\gamma'|} \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+\mu_j=\mu \\ \mu_1|\gamma_1'|+\cdots+\mu_j|\gamma_j'|=|\gamma'|}} C(\alpha_1',\cdots,\alpha_j',\beta_1,\cdots,\beta_j)$$
$$\frac{(\partial^{(\alpha_1',\beta_1)}L)^{\mu_1}\cdots\mu_k(\partial^{(\alpha_k',\beta_k)}L)^{\mu_k-1}(\partial^{(\alpha_k,\beta_k)}L)\cdots(\partial^{(\alpha_j',\beta_j)}L)^{\mu_j}}{L^{\mu+1}}$$

on pose $\mu_k-1=\mu_k'$, $\mu_{j+1}=1$, d'où on a

$$\mu_1+\cdots+\mu_{k-1}+\mu_k'+\cdots+\mu_{k+1}+\mu_j+\mu_{j+1}=\mu$$

on pose $\gamma_{j+1}=(\alpha_{j+1},\beta_{j+1})$ avec $\alpha_{j+1}=\alpha_k$, $\beta_{j+1}=\beta_k$ donc on a

$$\begin{aligned}\mu_1|\gamma_1'|+\cdots+\mu_{k-1}|\gamma_{k-1}'|+\mu_k'|\gamma_k'|+\mu_{k+1}|\gamma_{k+1}'|+\cdots+\mu_j|\gamma_j'|+\mu_{j+1}|\gamma_{j+1}| &= |\gamma'|+1 \\ &= |\gamma|.\end{aligned}$$

et on pose

$$C'(\alpha_1',\cdots,\alpha_k',\cdots,\alpha_j',\alpha_{j+1},\beta_1,\cdots,\beta_j)=\mu_k C(\alpha_1',\cdots,\alpha_j',\beta_1,\cdots,\beta_j)$$

On obtient alors

$$\Sigma_k = \sum_{1\leq\mu\leq|\gamma|} \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+\mu_{j+1}=\mu \\ \mu_1|\gamma'_1|+\cdots+\mu'_k|\gamma'_k|+\cdots+\mu_j|\gamma'_j|+\mu_{j+1}|\gamma_{j+1}|=|\gamma|}} C'(\alpha'_1,\cdots,\alpha'_k,\cdots,\alpha'_j,\alpha_{j+1},\beta_1,\cdots,\beta_j) \frac{(\partial^{(\alpha'_1,\beta_1)}L)^{\mu_1}\cdots(\partial^{(\alpha'_k,\beta_k)}L)^{\mu'_k}\cdots(\partial^{(\alpha'_j,\beta_j)}L)^{\mu_j}(\partial^{(\alpha_{j+1},\beta_{j+1})}L)^{\mu_{j+1}}}{L^{\mu+1}}.$$

Pour $k=j+1$ on pose

$$\Sigma_{j+1} = -\sum_{1\leq\mu\leq|\gamma'|} \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+\mu_j=\mu \\ \mu_1|\gamma'_1|+\cdots+\mu_j|\gamma'_j|=|\gamma'|}} C(\alpha'_1,\cdots,\alpha'_j,\beta_1,\cdots,\beta_j) \frac{(\mu+1)(\partial^{(\alpha'_1,\beta_1)}L)^{\mu_1}\cdots(\partial^{(\alpha'_j,\beta_j)}L)^{\mu_j}(\partial^{(\alpha_0,\beta_0)}L)}{L^{\mu+2}},$$

on pose $\mu_{j+1}=1$, $\mu'=\mu+1$, d'où on a

$$\mu_1+\cdots+\mu_j+\mu_{j+1}=\mu',$$

on pose $\gamma_{j+1}=(\alpha_{j+1},\beta_{j+1})$ avec $\alpha_{j+1}=\alpha_0$, $\beta_{j+1}=\beta_0$, donc on a

$$\begin{aligned} \mu_1|\gamma'_1|+\cdots+\mu_j|\gamma'_j|+\mu_{j+1}|\gamma_{j+1}| &= |\gamma'|+1 \\ &= |\gamma| \end{aligned}$$

et on pose

$$C'(\alpha'_1,\cdots,\alpha'_j,\alpha_{j+1},\beta_1,\cdots,\beta_j) = (\mu+1)C(\alpha'_1,\cdots,\alpha'_j,\beta_1,\cdots,\beta_j)$$

on obtient alors

$$\Sigma_{j+1} = -\sum_{1\leq\mu'\leq|\gamma|} \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+\mu_j+\mu_{j+1}=\mu' \\ \mu_1|\gamma'_1|+\cdots+\mu_j|\gamma'_j|+\mu_{j+1}|\gamma_{j+1}|=|\gamma|}} C'(\alpha'_1,\cdots,\alpha'_j,\alpha_{j+1},\beta_1,\cdots,\beta_j) \frac{(\partial^{(\alpha'_1,\beta_1)}L)^{\mu_1}\cdots(\partial^{(\alpha'_j,\beta_j)}L)^{\mu_j}(\partial^{(\alpha_{j+1},\beta_{j+1})}L)^{\mu_{j+1}}}{L^{\mu'+1}},$$

d'où $\partial_\xi I_1 = \Sigma_1+\cdots+\Sigma_{j+1}$.

De même en calcule $\partial_x I_2$, d'où on obtient (4.26). □

Lemme 4.3.2. *Pour tout* $(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^{2n}$*, il existe* $C(\alpha,\beta)$ *tel que*

$$\left|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\frac{1}{L(\tau,x,\xi)}\right|\leq C(\alpha,\beta)\frac{1}{m(x,\xi)+r^2}\phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|},\tag{4.10}$$

pour tout $(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}$*, pour tout* $\tau\in\Lambda$ *avec* $|\tau|=r$*.*

Preuve :

On utilise le lemme 4.3.1 on a

$$\left|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\frac{1}{L(\tau)}\right|\leq\sum_{1\leq\mu\leq|\gamma|}\sum_{\substack{\mu_1+\cdots+\mu_j=\mu\\ \mu_1|\gamma_1|+\cdots+\mu_j|\gamma_j|=|\gamma|}}C(\alpha_1,\cdots,\alpha_j,\beta_1,\cdots,\beta_j)\left|\frac{(\partial^{(\alpha_1,\beta_1)}L)^{\mu_1}\cdots(\partial^{(\alpha_j,\beta_j)}L)^{\mu_j}}{L^{\mu+1}}\right|.$$

On a

$$\begin{array}{rcl}\left|\partial_\xi^{\alpha_1}\partial_x^{\beta_1}L(\tau)\right|^{\mu_1} & \leq & C(\alpha_1,\beta_1)\left(m(x,\xi)+r^2\right)^{\mu_1}\phi^{-\mu_1|\alpha_1|}\varphi^{-\mu_1|\beta_1|},\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \left|\partial_\xi^{\alpha_j}\partial_x^{\beta_j}L(\tau)\right|^{\mu_j} & \leq & C(\alpha_j,\beta_j)\left(m(x,\xi)+r^2\right)^{\mu_j}\phi^{-\mu_j|\alpha_j|}\varphi^{-\mu_j|\beta_j|},\end{array}$$

en utilisant les hypothèses faites sur $L(\tau,x,\xi)$, on a pour tout $\tau\in\Lambda$, $\tau=re^{i\theta}$, pour tout $(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}$, il existe une constante C telle que

$$\left|\frac{1}{L^{\mu+1}(\tau,x,\xi)}\right|\leq\frac{C}{(m(x,\xi)+r^2)^{\mu+1}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\left|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\frac{1}{L(\tau)}\right| &\leq \sum_{1\leq\mu\leq|\gamma|}\sum_{\substack{\mu_1+\cdots+\mu_j=\mu\\ \mu_1|\gamma_1|+\cdots+\mu_j|\gamma_j|=|\gamma|}}C(\alpha_1,\cdots,\alpha_j,\beta_1,\cdots,\beta_j)\\ &\qquad\frac{(m(x,\xi)+r^2)^{\mu_1+\cdots+\mu_j}}{(m(x,\xi)+r^2)^{|\mu|+1}}\phi^{-\mu_1|\alpha_1|-\cdots-\mu_j|\alpha_j|}\varphi^{-\mu_1|\beta_1|-\cdots-\mu_j|\beta_j|}\\ &\leq C(\alpha,\beta)\frac{1}{(m(x,\xi)+r^2)}\phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|}\end{aligned}$$

où $C(\alpha,\beta)=C(\alpha_1,\cdots,\alpha_j,\beta_1,\cdots,\beta_j)=C.C(\alpha_1,\beta_1)\cdots C(\alpha_j,\beta_j)$. □

Étudions maintenant $\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta K_j(\tau,x,\xi)$ pour $j\geq 2$. On donne le lemme suivant.

Lemme 4.3.3. *Pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^{2n}$, il existe $C_j(\alpha,\beta)$ tel que*

$$|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta K_{2j}(\tau,x,\xi)|\leq C_j(\alpha,\beta)\frac{1}{m(x,\xi)+r^2}(\phi\varphi)^{-2j}\phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|},$$

pour tout $(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}$, pour tout $\tau\in\Lambda$ avec $|\tau|=r$.

Preuve :

De la forme (4.8), pour tout $j\in\mathbb{N}$, on obtient

$$\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta K_{2j}(\tau,x,\xi)=-\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\left(K_0(\tau,x,\xi)\sum_{\substack{|\gamma+\delta|=2(j-l)\\0\leq l\leq j-1}}\Gamma(\gamma,\delta)\partial_\xi^\gamma\partial_x^\delta L(\tau,x,\xi)\partial_\xi^\delta\partial_x^\gamma K_{2l}(\tau,x,\xi)\right).$$

En utilisant la formule de Leibniz on a

$$\begin{aligned}\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta K_{2j}(\tau,x,\xi) &= \sum_{\Upsilon}C(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\delta_1,\delta_2)\partial_\xi^{\gamma_1}\partial_x^{\gamma_2}K_0(\tau,x,\xi)\\ &\quad\partial_\xi^{\gamma+\gamma_4}\partial_x^{\delta+\gamma_3}L(\tau,x,\xi)\partial_\xi^{\delta+\delta_4}\partial_x^{\gamma+\delta_3}K_{2l}(\tau,x,\xi).\end{aligned}\tag{4.11}$$

où

$$\begin{aligned}\Upsilon = &\Big\{|\gamma|+|\delta|=2(j-l),0\leq l\leq j-1,\\ &\gamma_2+\delta_2=|\beta|,\gamma_1+\delta_1=|\alpha|,\gamma_4+\delta_4=\delta_1,\gamma_3+\delta_3=\delta_2\Big\}\end{aligned}$$

$$C(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\delta_1,\delta_2)= -\Gamma(\gamma,\delta)\left(\frac{|\beta|!}{\gamma_2!\delta_2!}\right)\left(\frac{|\alpha|!}{\gamma_1!\delta_1!}\right)\left(\frac{\delta_1!}{\gamma_4!\delta_4!}\right)\left(\frac{\delta_2!}{\gamma_3!\delta_3!}\right)$$

Pour $j=1$, en utilisant (4.10), on trouve

$$\left|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta K_2(\tau,x,\xi)\right|\leq C_1(\alpha,\beta)\frac{1}{m(x,\xi)+r^2}\phi^{-|\alpha|-2}\varphi^{-|\beta|-2},$$

et par récurrence si cette estimation est vérifiée pour $j=k$ i.e.

$$\left|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta K_{2k}(\tau,x,\xi)\right|\leq C_k(\alpha,\beta)\frac{1}{m(x,\xi)+r^2}(\phi\varphi)^{-2k}\phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|},\tag{4.12}$$

alors pour $j=k+1$, en utilisant (4.11) on a

$$\begin{aligned}\left|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta K_{2k+2}(\tau,x,\xi)\right| &\leq \sum_{\Upsilon'}C(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\delta_1,\delta_2)\left|\partial_\xi^{\gamma_1}\partial_x^{\gamma_2}K_0(\tau,x,\xi)\right|\\ &\quad\left|\partial_\xi^{\gamma+\gamma_4}\partial_x^{\delta+\gamma_3}L(\tau,x,\xi)\right|\left|\partial_\xi^{\delta+\delta_4}\partial_x^{\gamma+\delta_3}K_{2\ell}(\tau,x,\xi)\right|.\end{aligned}$$

où

$$\Upsilon' = \Big\{ |\gamma| + |\delta| = 2k, 0 \le l \le k, \\ \gamma_2 + \delta_2 = |\beta|, \gamma_1 + \delta_1 = |\alpha|, \gamma_4 + \delta_4 = \delta_1, \gamma_3 + \delta_3 = \delta_2 \Big\}$$

De (4.10) et (4.12) on obtient

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta K_{2k+2}(\tau, x, \xi)\right| \le \sum_{\Upsilon'} C(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \delta_1, \delta_2) \frac{1}{m(x,\xi) + r^2} \phi^{-|\gamma_1|} \varphi^{-|\gamma_2|} \\ (m(x,\xi) + r^2) \phi^{-|\gamma+\gamma_4|} \varphi^{-|\delta+\gamma_3|} \frac{1}{m(x,\xi) + r^2} (\phi\varphi)^{-2l} \phi^{-|\delta+\delta_4|} \varphi^{-|\gamma+\delta_3|}.$$

où $C(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \delta_1, \delta_2, l) = C_{K_0}(\gamma_1, \gamma_2) C_L(\delta + \delta_4, \gamma + \delta_3) C_{K_{2\ell}}(\delta + \delta_4, \gamma + \delta_3)$, de la définition de Υ' et on prend $l = k$ on obtient

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta K_{2k+2}(\tau, x, \xi)\right| \le C_{k+1}(\alpha, \beta) \frac{1}{m(x,\xi) + r^2} (\phi\varphi)^{-(2k+2)} \phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|}.$$

Ce qui achève la démonstration. □

On pose

$$K^{(2N)}(\tau) = \sum_{j=0}^{2N} h^j K_j(\tau).$$

Proposition 4.3.2. *Pour tout $N \ge 1$,*

$$\widehat{L}(\tau).Op_h^w(K^{(2N)}(\tau)) = 1 + h^{2N+2}.Op_h^w(R^{(2N)}(\tau))$$

où le symbole $R^{(2N)}(\tau)$ vérifie l'inégalité suivante :

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta R^{(2N)}(\tau; x, \xi)\right| \le C_{\alpha,\beta}^{(2N)} (\phi\varphi)^{-2j} \frac{m(x,\xi) + r\sqrt{m(x,\xi)}}{m(x,\xi) + r^2}, \tag{4.13}$$

pour tout $\tau \in \Lambda$, pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, pour tout $h \in]0, 1]$.

Preuve :

En utilisant la relation de récurrence pour les termes de la paramétrix $K_j(\tau)$ avec les lemmes 4.3.2, 4.3.3 et la proposition de Dauge-Robert avec

$$m_1(x, \xi) = m(x, \xi) + r\sqrt{m(x, \xi)},$$

$$m_2(x,\xi) = \frac{1}{m(x,\xi)+r^2}.$$

□

Dans la suite on supposera que le spectre de $\hat{H}_0$ est dans $[a, +\infty[$, $a > 0$. En effet, on se ramène à ce cas par translation sur τ dans $L(\tau)$.

La preuve du résultat suivant est analogue à la preuve des propositions 2.1.1 et 1.2.1.

Proposition 4.3.3. *On a*

1) Pour tout $\tau \in \mathbb{C}$, $\widehat{L}(\tau)$ admet un unique prolongement fermé sur $D(H_0)$.

2) Il existe $R > 0$ tel que si $|\tau| \geq R$, $|\arg(\tau) - \pi| \leq \frac{\pi}{4}$, alors $\widehat{L}(\tau)$ est inversible $z \mapsto \widehat{L}^{-1}(\tau)$ est holomorphe dans

$$\Lambda_R = \left\{\tau, |\tau| \geq R, |\arg(\tau) - \pi| \leq \frac{\pi}{4}\right\},$$

et $\widehat{L}^{-1}(\tau)$ est un opérateur compact, dans la classe de Schatten $\mathcal{C}^p$ pour tout p tel que

$$\int_{R^{2n}} \frac{1}{m^p(x,\xi)} dx d\xi < +\infty. \tag{4.14}$$

Exemple 4.3.1. *On considère l'exemple 4.1.1. On applique la proposition 4.3.3 avec*

$$m(x,\xi) \;=\; (|\xi|^2 + |x|^{2M} + 1)^{\frac{1}{2}},$$

i.e. on cherche à savoir pour quel p on a

$$\int_{\mathbb{R}}^{2n} \frac{1}{(|\xi|^2 + |x|^{2M} + 1)^{\frac{p}{2}}} dx d\xi < +\infty.$$

En faisant le changement de variable $\xi = \left(\sqrt{|x|^{2M}+1}\right)\xi'$ on obtient que cette intégrale converge pour

$$p > \frac{n(M+1)}{M},$$

donc $\widehat{L}(\lambda) \in \mathcal{C}^p$, pour $p > \frac{n(M+1)}{M}$. Pour $n = 1$, comme on l'a vu dans le chapitre **??** *(c.f. exemple 2.2.2), les rayons de croissance minimale de cette famille* *se trouvent dans le demi-plan d'axe réel négatif avec la condition d'ouverture suivante :*

$$\theta < \frac{M\pi}{M+1}.$$

Exemple 4.3.2. *On considère l'exemple suivant :*

$$L_P(\lambda) = -(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) + (x^2 + y^4 - \lambda)^2, \ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{4.15}$$

On a

$$\begin{aligned} H_0(x, y, \xi, \eta) &= \xi^2 + \eta^2 + (x^2 + y^4)^2, \\ H_1(x, y, \xi, \eta) &= -2(x^2 + y^4), \end{aligned}$$

H_0 *et* H_1 *sont d'ordre* 1 *et* $\frac{1}{2}$ *respectivement et de type* $(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$*, de plus on a les estimations suivantes :*

$$\left|\partial_x^{\alpha_1}\partial_y^{\alpha_2}\partial_\xi^{\beta_1}\partial_\eta^{\beta_2} H_0(x, y, \xi, \eta)\right| \leq C_0(\alpha, \beta) m(x, y, \xi, \eta) \varphi^{-(2\alpha_1+\alpha_2)} \phi^{-(4\beta_1+4\beta_2)},$$

$$\left|\partial_x^{\alpha_1}\partial_y^{\alpha_2}\partial_\xi^{\beta_1}\partial_\eta^{\beta_2} H_1(x, y, \xi, \eta)\right| \leq C_1(\alpha, \beta) (m(x, y, \xi, \eta))^{\frac{1}{2}} \varphi^{-(2\alpha_1+\alpha_2)} \phi^{-(4\beta_1+4\beta_2)},$$

où

$$m(x, y, \xi, \eta) = \phi(x, y, \xi, \eta) = \varphi(x, y, \xi, \eta) = (1 + x^4 + y^8 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}}$$

En utilisant la méthode de Pham-Robert (c.f. chapitre **??***), les rayons de croissance minimale de* $L_P(\lambda)$ *se trouvent dans le demi-plan*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) < 0\}.$$

On veut utiliser la proposition 4.3.3, en vérifiant la condition 4.14, donc on cherche p *tel que*

$$I = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{1}{(1 + x^4 + y^8 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{p}{2}}} dx dy d\xi d\eta < +\infty,$$

on commence par faire le changement de variables :

$$\begin{aligned} y &= (1 + x^4)^{\frac{1}{8}} y', \\ \xi &= (1 + x^4)^{\frac{1}{2}} \xi', \\ \eta &= (1 + x^4)^{\frac{1}{2}} \eta', \end{aligned}$$

on obtient

$$I = \int_{\mathbb{R}^4} \left(\frac{1}{(1+x^4)^{\frac{p}{2}-\frac{9}{8}}} \right) \left(\frac{1}{(1+y'^8+\xi'^2+\eta'^2)^{\frac{p}{2}}} \right) dx dy' d\xi' d\eta'$$

donc l'intégrale par rapport à x converge lorsque

$$p > \frac{11}{4}, \tag{4.16}$$

d'où il existe $C_1 > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^4)^{\frac{p}{2}-\frac{9}{8}}} = C_1$$

pour l'intégrale par rapport à y', ξ', η' on fait le changement de variables :

$$\begin{aligned} \xi' &= (1+y'^8)^{\frac{1}{2}}\xi'', \\ \eta' &= (1+y'^8)^{\frac{1}{2}}\eta'', \end{aligned}$$

on obtient

$$I = C_1 \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{(1+y'^8)^{\frac{p}{2}-1}} \right) \left(\frac{1}{(1+\xi''^2+\eta''^2)^{\frac{p}{2}}} \right) dy' d\xi'' d\eta''$$

l'intégrale par rapport à y' converge lorsque

$$p > \frac{9}{4}, \tag{4.17}$$

donc il existe une constante $C_2 > 0$ telle que

$$C_2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+y'^8)^{\frac{p}{2}-1}} dy'.$$

On fait le changement de variable :

$$\eta'' = (1+\xi''^2)^{\frac{1}{2}}\eta''',$$

il en résulte

$$I = C_1 C_2 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{(1+\xi''^2)^{\frac{p}{2}-\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{1}{(1+\eta'''^2)^{\frac{p}{2}}} \right) d\xi'' d\eta'''$$

l'intégrale par rapport à ξ'' converge lorsque

$$p > 2, \tag{4.18}$$

et l'intégrale par rapport à η''' converge lorsque

$$p > 1. \tag{4.19}$$

en prenant le maximum de (4.16), (4.17), (4.18), (4.19), on obtient que $L_P^{-1}(\lambda) \in \mathcal{C}_p$ pour $p > \frac{11}{4}$.
Le symbole de la paramétrix de $L_P(\lambda)$ est :

$$K(\lambda, x, y, \xi, \eta) = \sum_{j=0}^{N} K_j(\lambda, x, y, \xi, \eta) + R^{(N)}(\lambda, x, y, \xi, \eta),$$

avec

$$\begin{aligned} K_0(\lambda, x, y, \xi, \eta) = &\ \frac{1}{L(\lambda, x, y, \xi, \eta)} \\ K_j(\lambda, x, y, \xi, \eta) = &\ -K_0(x, y, \xi, \eta, \lambda) \textstyle\sum_\Upsilon \Gamma(\alpha, \beta) \\ &\ \partial^\alpha_{\xi,\eta} D^\beta_{x,y} L(\lambda, x, y, \xi, \eta) \partial^\beta_{\xi,\eta} D^\alpha_{x,y} K_l(\lambda, x, y, \xi, \eta) \end{aligned} \tag{4.20}$$

où

$$\Upsilon = \left\{ \frac{3}{2}(\alpha_1 + \beta_1) + \frac{5}{4}(\alpha_2 + \beta_2) + l = j + 1, l \leq j \right\},$$

et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ et $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ avec

$$\begin{aligned} \left| \partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\alpha_2} \partial_\xi^{\beta_1} \partial_\eta^{\beta_2} K_j(\lambda, x, y, \xi, \eta) \right| &\leq C_j(\alpha, \beta)(m(x, y, \xi, \eta))^{-1}(\phi\varphi)^{-j} \varphi^{-(2\alpha_1 + \alpha_2)} \phi^{-4(\beta_1 + \beta_2)}, \\ \left| \partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\alpha_2} \partial_\xi^{\beta_1} \partial_\eta^{\beta_2} R^{(N)}(\lambda, x, y, \xi, \eta) \right| &\leq C^{(N)}(\alpha, \beta) \frac{m(x, y, \xi, \eta) + |\lambda| \sqrt{m(x, y, \xi, \eta)}}{m(x, y, \xi, \eta) + |\lambda|^2} (\phi\varphi)^{-N}. \end{aligned}$$

Le résultat suivant montre que les directions θ, $|\pi - \theta| \leq \dfrac{\pi}{4}$ sont des directions de croissance minimale pour $\widehat{L}^{-1}(\tau)$.

Proposition 4.3.4. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\tau \in \Lambda_R$ ($R > 0$ assez grand). On ait*
i) $\left\| \widehat{L}^{-1}(\tau) \right\|_{\mathcal{L}(\mathsf{L}^2, \mathsf{L}^2)} \leq \dfrac{C}{|\tau|^2}$.
ii) $\left\| \widehat{L}^{-1}(\tau) \right\|_{\mathcal{L}(\mathsf{L}^2, D(H_0))} \leq C$.

Preuve :

En utilisant le lemme 4.3.3, la proposition 4.3.2 et le théorème de Calderon-Vaillancourt on obtient (i).

Pour (ii), on calcule le symbole de $\widehat{H}_0\widehat{L}^{-1}(\tau)$

$$H_0K^{(2N)}(\tau,x,\xi) \;=\; \sum_{|\gamma+\delta|=2N}\Gamma(\gamma,\delta)\partial_\xi^\gamma\partial_x^\delta H_0(x,\xi)\partial_\xi^\delta\partial_x^\gamma K^{(2N)}(\tau,x,\xi).$$

Pour tout $N\geq 0$ et pour tous multi-indices α, β, il existe alors une constante $C_N(\alpha,\beta)$ telle que :

$$\left|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta H_0K^{(2N)}(\tau,x,\xi)\right|\leq C_N(\alpha,\beta),$$

pour tout $\tau\in\Lambda_R$. Le théorème 2.1.1 implique que $\widehat{H}_0\widehat{L}^{-1}(\tau)\in\mathcal{L}(\mathsf{L}^2,\mathsf{L}^2)$, donc $\widehat{H}_0\widehat{L}^{-1}(\tau)\in\mathcal{L}(\mathsf{L}^2,D(H_0))$ et de plus (ii) est vérifiée. $\square$

Proposition 4.3.5. *La fonction*

$$\tau\mapsto\widehat{L}^{-1}(\tau)$$

est méromorphe dans $\mathbb{C}$, i.e. $\widehat{L}^{-1}(\tau)$ est holomorphe en dehors de $\sigma(\widehat{L})=\{\lambda_j\}_{j\in J}$, où J est soit vide, soit fini, soit infini dénombrable ayant l'infini comme seul point d'accumulation, λ_j est un pôle de multiplicité finie.

Preuve :

Prouver que la fonction suivante est méromorphe

$$\tau\mapsto\widehat{L}^{-1}(\tau)$$

est analogue à la preuve de la proposition 1.2.1. La preuve des autres résultats de cette proposition peut aussi se déduire du théorème de Fredholm analytique. $\square$

4.3.2 Systèmes non-autoajoints

On considère les familles d'opérateurs matriciels $\widehat{\mathcal{A}_L} - \tau\mathbb{I}$ de la forme (4.6) et $\widehat{\mathcal{A}_{SL}} - \tau\mathbb{I}$ de la forme (4.7), qui représentent la linéarisation de la famille quadratique d'opérateurs (4.1). Comme on a vu dans le chapitre 1, les deux réalisation, $\widehat{\mathcal{A}_L}$, $\widehat{\mathcal{A}_{SL}}$ sont similaires i.e. deux opérateurs $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$ tels que :

$$\widehat{C} = \begin{pmatrix} \widehat{H}_0^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\widehat{H}_0^{\frac{1}{2}} & -\widehat{H}_1 \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

on a

$$\widehat{A_L} = \widehat{D}\widehat{C}\ , \quad \widehat{A_{SL}} = \widehat{C}\widehat{D}\ .$$

donc

$$\widehat{C}\widehat{A_L} = \widehat{A_{SL}}\widehat{C}\ , \quad \widehat{A_{SL}}\widehat{D} = \widehat{D}\widehat{A_L},$$

d'où $\widehat{A_L}$, $\widehat{A_{SL}}$ sont similaires. On rappelle la définition suivante.

Définition 4.3.2. *Pour des fonctions poids m, ϕ, φ. Un symbole matriciel, est une fonction à valeurs opérateurs avec $A \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, M_2(\mathbb{C}))$ (où $M_2(\mathbb{C})$ est l'ensemble de matrices 2×2 des coefficients dans $\mathbb{C}$) tel que pour tous multi-indices (α,β), il existe une constante $C(\alpha,\beta)$ telle que*

$$\|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta A(x,\xi)\| \leq C(\alpha,\beta) m(x,\xi)\phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|},$$

pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\|.\|$ désigne la norme d'une matrice i.e. pour une matrice $A(x,\xi) = \{a_{i,j}(x,\xi)\}_{i,j}$, on a

$$\|A(x,\xi)\| = \sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}} a_{i,j}(x,\xi).$$

Les opérateurs $\widehat{\mathcal{A}_L} - \tau\mathbb{I}$, $\widehat{\mathcal{A}_{SL}} - \tau\mathbb{I}$, de domaine $D(H_0) \times D(H_0^{\frac{1}{2}})$, $D(H_0^{\frac{1}{2}}) \times D(H_0^{\frac{1}{2}})$, respectivement, avec des symboles $(A_L(x,\xi) - \tau\mathbb{I})$, $(A_{SL}(x,\xi) - \tau\mathbb{I})$ tels que :

$$(A_L(x,\xi) - \tau\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} -\tau & 1 \\ -H_0 & -H_1 - \tau \end{pmatrix}, \tag{4.22}$$

$$(A_{SL}(x,\xi)-\tau\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} -\tau & H_0^{\frac{1}{2}} \\ -H_0^{\frac{1}{2}} & -H_1-\tau \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

pour tout multi-indices $(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^{2n}$, il existe des constantes $C_L(\alpha,\beta)$, $C_{SL}(\alpha,\beta)$ telle que :

$$\|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta(A_L(x,\xi)-\tau\mathbb{I})\| \leq C_L(\alpha,\beta)m(x,\xi)\phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|}, \tag{4.24}$$

$$\|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta(A_{SL}(x,\xi)-\tau\mathbb{I})\| \leq C_{SL}(\alpha,\beta)(m(x,\xi))^{\frac{1}{2}}\phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|}. \tag{4.25}$$

où m, ϕ, φ sont des fonctions poids.

Le plus souvent dans notre travail on utilise l'opérateur $\widehat{A_{SL}}$. On calcule alors la paramétrix $\widehat{B_{SL}}$, de la famille $\widehat{\mathcal{A}_{SL}}-\tau\mathbb{I}$. Le h-symbole, B_{SLj}, de $\widehat{B_{SLj}}$ avec

$$\widehat{B_{SL}}^{(N)}(\tau,x,\xi) \;=\; \sum_{j=0}^{N} h^j\widehat{B_{SLj}}(\tau,x,\xi),$$

où $h\in]0,1]$, $\tau\in\Lambda$, $(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}$, Λ est un secteur du plan complexe, symétrique par rapport à l'axe réel négatif et d'ouverture inférieure ou égale à $\dfrac{\pi}{2}$ (c.f ; fig.4.3), i.e.

$$\Lambda = \Big\{z\in\mathbb{C}\ :\ \frac{\pi}{2}+\delta<\arg(z)<\frac{3\pi}{2}-\delta\,,\delta>0\,;\ |z|\geq r\ ,\ r>0\Big\}$$

et

$$\begin{aligned} B_{SL0}(\tau,x,\xi) &= (A_{SL}-\tau)^{-1} \\ B_{SLj}(\tau,x,\xi) &= -B_{SL0}(\tau,x,\xi)\sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=2(j-l)\\ 0\leq l\leq j-1}}\Gamma(\alpha,\beta)\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta A_{SL}(x,\xi)\partial_\xi^\beta\partial_x^\alpha B_{SL2l}(\tau,x,\xi). \end{aligned}$$

Le résultat suivant est un résultat direct du lemme 4.3.1 et de la formule de Leibniz.

Lemme 4.3.4. *Pour une fonction, $Q(x,\xi)\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, pour tout multi-indices*

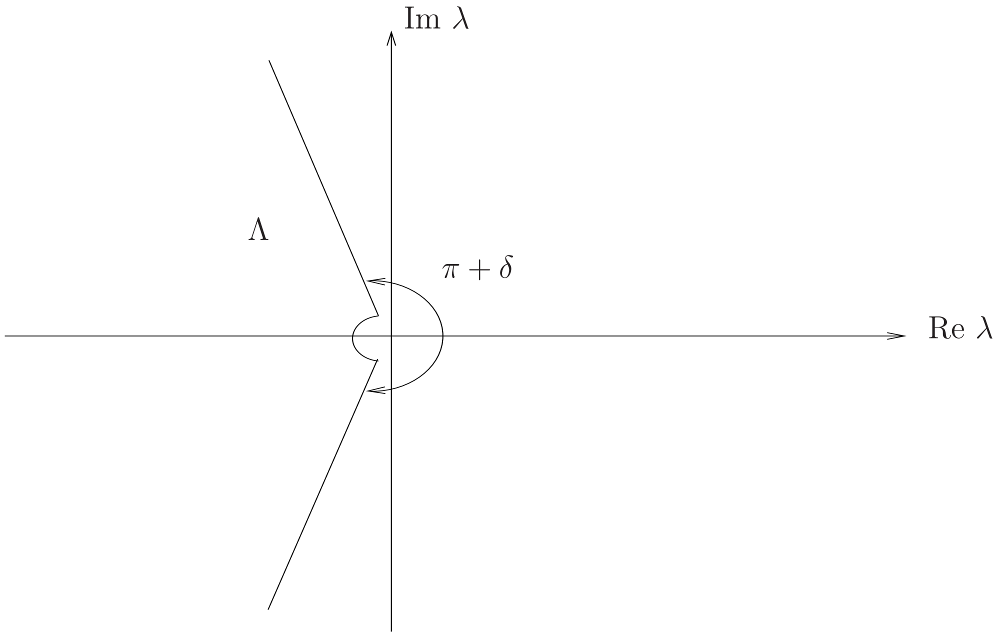

FIG. 4.3 – Le secteur Λ

$\gamma = (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}$, $\delta = (\alpha', \beta') \in \mathbb{N}^{2n}$, avec $|\gamma| \leq |\delta|$, on a

$$\sum_{|(\alpha,\beta)|=1} \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \left(\frac{Q(x,\xi)}{L(\tau)} \right) = \sum_{\substack{1\leq\mu\leq|\gamma| \\ |\gamma|\leq|\delta|}} \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+\mu_j=\mu \\ \mu_1|\gamma_1|+\cdots+\mu_j|\gamma_j|=|\gamma|}} C(\gamma_j, \delta) \frac{(\partial^{(\alpha-\alpha',\beta-\beta')}Q)(\partial^{(\alpha_1,\beta_1)}L)^{\mu_1}\cdots(\partial^{(\alpha_j,\beta_j)}L)^{\mu_j}}{L^{\mu+1}}, \tag{4.26}$$

avec $1 \leq j \leq n$ et $\gamma_i = (\alpha_i, \beta_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Le résultat suivant donne l'estimation des dérivés de B_{SL0}.

Proposition 4.3.6. *Pour tout (α, β), il existe une constante $C(\alpha, \beta)$ telle que :*

$$\|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta (B_{SL0}(\tau, x, \xi))\| \leq C(\alpha,\beta) \frac{1}{\sqrt{m(x,\xi)} + r} \phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|}, \tag{4.27}$$

pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, pour tout $\tau \in \Lambda$ avec $|\tau| = r$.

Preuve :

Il faut estimer les opérateurs matriciels suivants :

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \left(A_{SL}(x,\xi) - \tau\mathbb{I}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \left(\dfrac{-\tau - H_1}{L(\tau)}\right) & \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \left(\dfrac{-\sqrt{H_0}}{L(\tau)}\right) \\ & \\ \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \left(\dfrac{\sqrt{H_0}}{L(\tau)}\right) & \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \left(\dfrac{-\tau}{L(\tau)}\right) \end{pmatrix}. \tag{4.28}$$

En utilisant les lemmes 4.3.1 , 4.3.4 avec les hypothèses faites sur H_0, H_1 et $L(\tau)$, il existe donc des constantes $C_1(\alpha,\beta)$, $C_2(\alpha,\beta)$, $C_3(\alpha,\beta)$ telles que :

$$\begin{aligned} \left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \left(\frac{-\tau - H_1}{L(\tau)}\right)\right| &\leq C_1(\alpha,\beta)\frac{\sqrt{m(x,\xi)}}{m(x,\xi)+r^2}\phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|}, \\ \left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \left(\frac{\sqrt{H_0}}{L(\tau)}\right)\right| &\leq C_2(\alpha,\beta)\frac{\sqrt{m(x,\xi)}}{m(x,\xi)+r^2}\phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|}, \\ \left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \left(\frac{-\tau}{L(\tau)}\right)\right| &\leq C_3(\alpha,\beta)\frac{r}{m(x,\xi)+r^2}\phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|}, \end{aligned}$$

chaque terme est majoré par :

$$\frac{\sqrt{m(x,\xi)}+r}{m(x,\xi)+r^2}\phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|},$$

d'où on obtient le résultat en utilisant le fait que :

$$(\sqrt{m(x,\xi)}+r)^2 \leq 2(m(x,\xi)+r^2).$$

□

Proposition 4.3.7. *Pour tout (α,β), il existe des constantes $C_{Lj}(\alpha,\beta)$, $C_{SLj}(\alpha,\beta)$ telles que :*

$$\|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta (B_{SLj}(\tau,x,\xi))\| \leq C_{SLj}(\alpha,\beta)\frac{1}{\sqrt{m(x,\xi)}+r}\phi^{-|\alpha|-j}\varphi^{-|\beta|-j}, \tag{4.29}$$

pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, pour tout $\tau \in \Lambda$ avec $|\tau| = r$.

On pose

$$B_{SL}{}^{(N)}(\tau) = \sum_{j=0}^{N} h^j B_{SLj}(\tau,x,\xi).$$

Le résultat suivant donne les estimations des termes d'erreur dans les calculs de paramétrix.

Proposition 4.3.8. *Pour tout $N \geq 1$, on a*

$$\left(\widehat{\mathcal{A}_{SL}} - \tau \mathbb{I}\right) Op_h^w({B_{SL}}^{(N)}(\tau)) = 1 + h^{N+1} Op_h^w({R_{SL}}^{(N)}(\tau)),$$

avec

$$\|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta {R_{SL}}^{(N)}(\tau; x, \xi)\| \leq C^{(N)}(\alpha, \beta) \frac{\sqrt{m(x,\xi)}}{\sqrt{m(x,\xi)} + r} (\phi\varphi)^{-N}. \tag{4.30}$$

pour tout $\tau \in \Lambda$, $\tau = re^{i\theta}$, pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, pour tout $h \in]0, 1]$.

Preuve :

En utilisant la relation de récurrence pour les termes de la paramétrix $B_j(\tau)$ avec l'estimation (4.25), les propositions 4.3.6, 4.3.7 et la proposition de Dauge-Robert avec

$$m_1(x, \xi) = \sqrt{m(x,\xi)},$$
$$m_2(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{m(x,\xi)} + r}.$$

□

Exemple 4.3.3. *On considère la famille d'opérateurs dans l'exemple 4.3.2. On associe à $L_P(\lambda)$, l'opérateur matriciel $\widehat{\mathcal{A}_L}$ défini dans $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^2) \times \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^2)$ tel que :*

$$\widehat{\mathcal{A}_L} = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{H}_0^{\frac{1}{2}} \\ -\widehat{H}_0^{\frac{1}{2}} & -\widehat{H}_1 \end{pmatrix},$$

où $\widehat{H}_0 = -\Delta_{x,y} + P^2(x, y)$, $\widehat{H}_1 = -2P(x, y)$. Le symbole de $\widehat{\mathcal{A}_L}$ est

$$A_L = \begin{pmatrix} 0 & H_0^{\frac{1}{2}} \\ -H_0^{\frac{1}{2}} & -H_1 \end{pmatrix},$$

où $H_0 = \xi^2 + \eta^2 + P^2(x, y)$ et $H_1 = -2P(x, y)$. On a $A_L(\rho^{\frac{1}{2}} x, \rho^{\frac{1}{4}} y, \rho\xi, \rho\eta) = \rho A_L(x, y, \xi, \eta)$ avec

$$\left|\partial_{x,y}^\alpha \partial_{\xi,\eta}^\beta A_L(x, y, \xi, \eta)\right| \leq C\sqrt{m(x, y, \xi, \eta)} \phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|}$$

pour

$$m = \phi(x, y, \xi, \eta) = \varphi(x, y, \xi, \eta) = (1 + |x|^4 + |y|^8 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant la proposition (4.3.3) on obtient que $A_L(x, y, \xi, \eta) \in \mathcal{C}^p$ *avec*

$$p > \frac{11}{4}$$

On calcule la paramétrix de $\widehat{\mathcal{A}_L} + \lambda$, *le symbole* $B(x, y, \xi, \eta, \lambda)$ *de la paramétrix* $(\widehat{\mathcal{A}}_L + \lambda)^{-1}$ *est donné par la forme asymptotique suivante :*

$$B(x, y, \xi, \eta, \lambda) = \sum_{j=0}^{N} B_j(x, y, \xi, \eta, \lambda) + R^{(N)}(x, y, \xi, \eta, \lambda),$$

avec :

$$\begin{aligned} B_0(x, y, \xi, \eta, \lambda) = & \quad (A_L + \lambda)^{-1} \\ B_j(x, y, \xi, \eta, \lambda) = & \quad -B_0(x, y, \xi, \eta, \lambda) \sum_{\Lambda} \Gamma(\alpha, \beta) \\ & \quad \partial^{\alpha}_{\xi,\eta} D^{\beta}_{x,y} (A_L(x, y, \xi, \eta) + \lambda)^m \partial^{\beta}_{\xi,\eta} D^{\alpha}_{x,y} B_l(x, y, \xi, \eta, \lambda) \end{aligned}$$

où

$$\Lambda = \left\{ \frac{3}{2}(\alpha_1 + \beta_1) + \frac{5}{4}(\alpha_2 + \beta_2) + l = j + 1, l \leq j \right\},$$

et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ *avec les estimations suivants :*

$$\begin{aligned} \|\partial^{\beta}_{\xi,\eta} D^{\alpha}_{x,y} B_0(x, y, \xi, \eta, \lambda)\| & \leq C_0(\alpha, \beta) \frac{1}{\sqrt{m(x, y, \xi, \eta)} + r} \phi^{-(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{4})} \varphi^{-(\beta_1 + \beta_2)}, \\ \|\partial^{\beta}_{\xi,\eta} D^{\alpha}_{x,y} B_l(x, y, \xi, \eta, \lambda)\| & \leq C_l(\alpha, \beta) \frac{1}{\sqrt{m(x, y, \xi, \eta)} + r} \phi^{-(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{4}) - l} \varphi^{-(\beta_1 + \beta_2) - l} \quad (4.31) \\ \|\partial^{\beta}_{\xi,\eta} D^{\alpha}_{x,y} R^{(N)}(x, y, \xi, \eta)\| & \leq C_N(\alpha, \beta) \frac{\sqrt{m(x, y, \xi, \eta)}}{\sqrt{m(x, y, \xi, \eta)} + r} (\phi\varphi)^{-N}. \end{aligned}$$

4.3.3 L'hypothèse $(HP - 3)$

Afin de mieux comprendre l'hypothèse $(HP - 3)$, on va faire varier la taille de H_1 et son ordre :

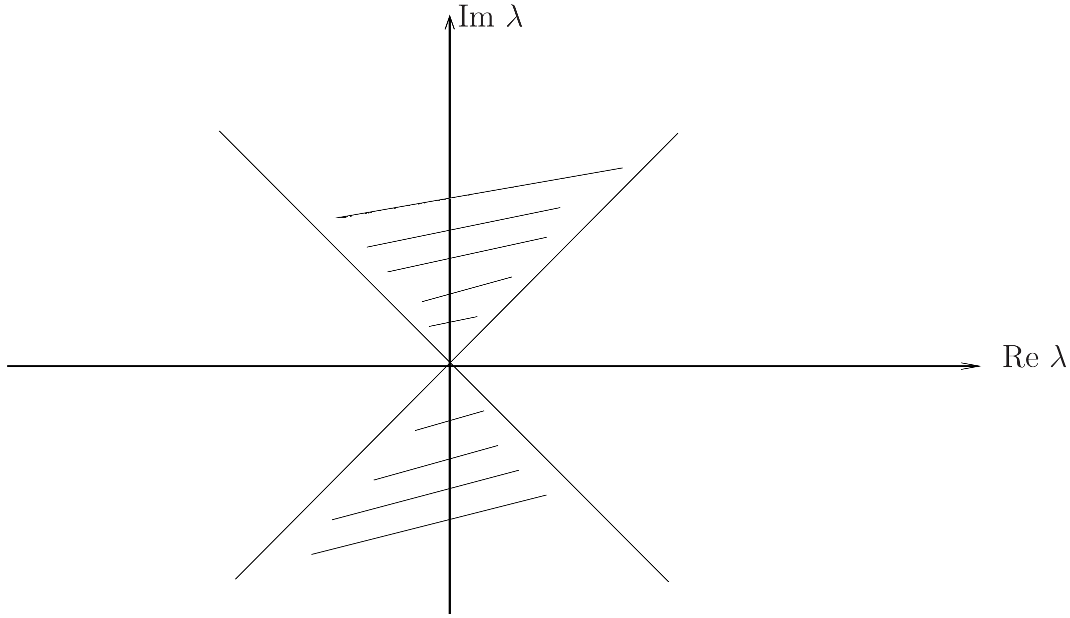

FIG. 4.4 – Le spectre de $L_\kappa(\lambda)$.

Dans **le premier cas** on considère la famille quadratique

$$L_\kappa(\lambda) = \widehat{H}_0 + \lambda\kappa\widehat{H}_1 + \lambda^2\ , \quad \kappa > 0\ , \quad \kappa \to 0.$$

Dans **le deuxième cas** on remplace $(HP-3)$ par l'hypothèse :
$(HP-3)_\delta$ $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta H_1| \leq C_{\alpha\beta} m^\delta \phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|}$, avec $\delta < \frac{1}{2}$.
On va examiner quelles sont les conséquences de ces hypothèses sur la localisation du spectre de $L(\lambda)$ (et sur l'existence de valeur propres).
Pour **le premier cas** :
Dans ces situations on peut utiliser un argument de perturbation standard :

$$\widehat{L_\kappa}(\lambda) = (\widehat{H}_0 + \lambda^2)(1 + \lambda(\widehat{H}_0 + \lambda^2)^{-1}\kappa\widehat{H}_1).$$

Il résulte de l'hypothèse $(HP-3)$ et du théorème de Calderon-Vaillancourt, qu'il existe une constante C telle que

$$\left\| \widehat{H}_0^{-\frac{1}{2}} \widehat{H}_1 \right\|_{\mathcal{L}(\mathsf{L}^2,\mathsf{L}^2)} \leq C < +\infty.$$

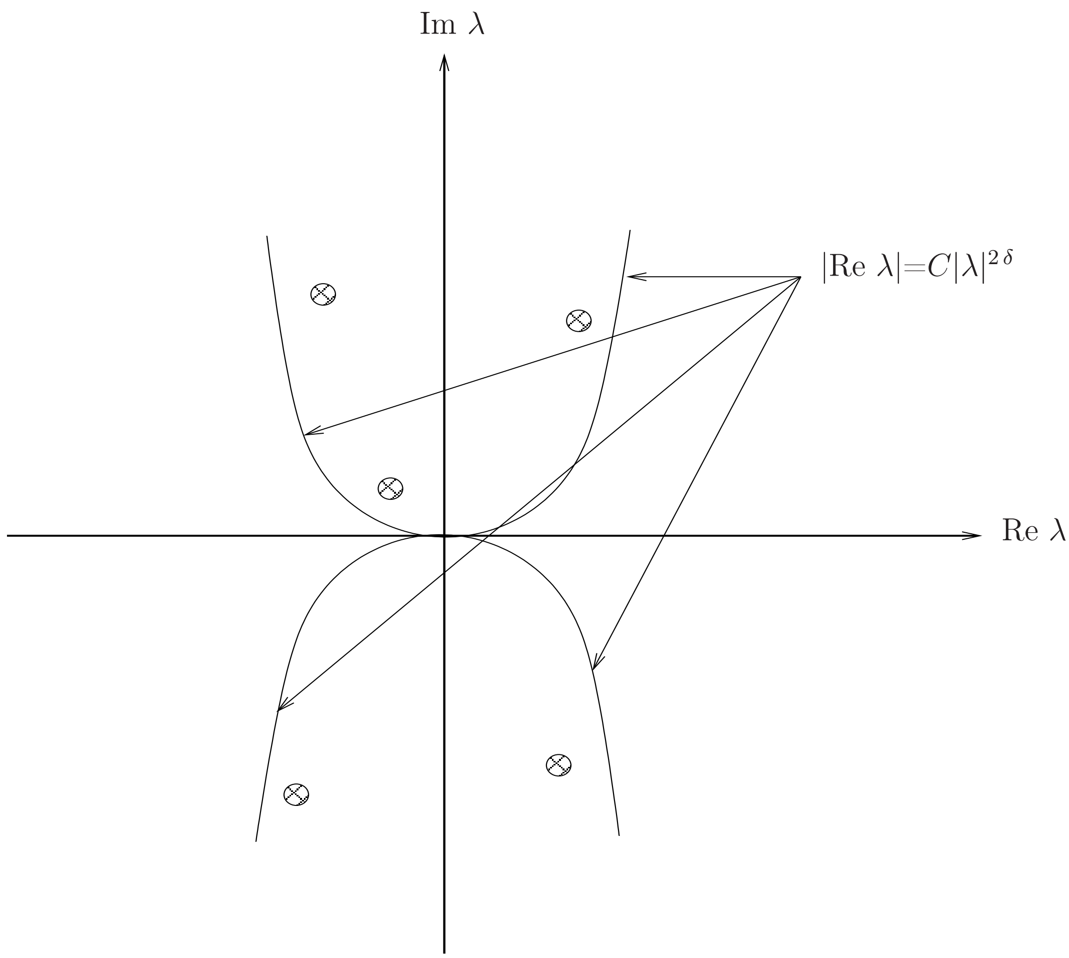

FIG. 4.5 – Le spectre de $\widehat{L}(\lambda)$.

Or on a
$$\left\|(\widehat{H}_0+\lambda^2)^{-1}\widehat{H}_0^{\frac{1}{2}}\right\| = \sup_{t\geq a}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{|t+\lambda^2|},$$
où $a>0$ et $a=\inf H_0$ avec H_0 est le symbole de $\widehat{H}_0$. De plus on a
$$\begin{aligned}\frac{t}{|t+\lambda^2|} &= \frac{t}{(t-r^2)^2+4t\,r^2\cos^2(\theta)}\\ &\leq \frac{1}{4r^2\cos^2(\theta)}\end{aligned}$$
d'où
$$\left\|\lambda(\widehat{H}_0+\lambda^2)^{-1}\kappa\widehat{H}_1\right\|_{\mathcal{L}(\mathsf{L}^2,\mathsf{L}^2)} \leq \frac{\kappa K}{2|\cos(\theta)|}.$$

□

On en déduit le résultat suivant.

Proposition 4.3.9. *On suppose $\kappa K<1$. Alors le spectre de $L_\kappa(\lambda)$ est inclus dans un secteur vertical (c.f. fig.4.4) :*
$$\sigma(L_\kappa)\subseteq\left\{re^{i\theta}\ ,\ \ r>0\ ,\ \ \left|\frac{\pi}{2}-\theta\right|\leq\arcsin\left(\frac{\kappa K}{2}\right)\right\}.$$

On étudie maintenant **le deuxième cas**. On procède de la même manière, il existe une constante C telle que
$$\left\|\widehat{H}_0^{-\delta}\widehat{H}_1\right\|_{\mathcal{L}(\mathsf{L}^2,\mathsf{L}^2)}\leq C<+\infty,$$
et
$$\left\|(\widehat{H}_0+\lambda)^{-1}\widehat{H}_0^{-\delta}\right\|_{\mathcal{L}(\mathsf{L}^2,\mathsf{L}^2)} = \sup_{t\geq a}\frac{t^\delta}{|t+\lambda^2|}$$
où $a>0$, $a=\inf H_0$ et
$$\frac{t^{2\delta}}{|t+\lambda^2|^2}=\frac{t^{2\delta}}{(t-r^2)^2+4tr^2\cos^2(\theta)},$$
avec $\lambda=re^{i\theta}$, $r>0$, on distingue deux cas pour majorer

i) $\frac{r^2}{2}\leq t\leq\frac{3r^2}{2}$, alors il existe une constante C telle que
$$\frac{t^{2\delta}}{|t+\lambda^2|^2}\leq C\frac{r^{4\delta-4}}{\cos^2(\theta)}.$$

ii) $|t - r^2| \geq \frac{r^2}{2}$ alors il existe une constante C telle que

$$\frac{t^{2\delta}}{|t+\lambda^2|^2} \leq \frac{t^{2\delta}}{\frac{r^4}{4} + 4tr^2\cos^2(\theta)} \leq \frac{C}{r^4}.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} \left\| (\widehat{H}_0 + \lambda)^{-1} \widehat{H}_0^{-\delta} \right\|_{\mathcal{L}(\mathsf{L}^2,\mathsf{L}^2)} &\leq \frac{Cr^{2\delta-1}}{|\cos(\theta)|} \\ &= \frac{C|\lambda|^{2\delta}}{|\Re(\lambda)|}. \end{aligned}$$

On a alors le résultat suivant.

Proposition 4.3.10. *Sous les hypothèses précédentes (en particulier $\delta < \frac{1}{2}$), on a*

1) $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$, $\theta \neq -\dfrac{\pi}{2}$, alors θ est une direction de croissance minimale pour la résolvante $\widehat{L}^{-1}(\lambda)$.

2) Le spectre de $\widehat{L}(\lambda)$, à un ensemble fini de valeurs propres près, est inclus dans des régions paraboliques suivant l'axe imaginaire, définies par les inégalités

$$|\Re(\lambda)| \leq C|\lambda|^{2\delta},$$

pour une constante $C > 0$ (c.f. fig.4.5).

Corollaire 4.3.1. *Soit $p > 0$ tel que*

$$H_0^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{C}^p.$$

Sous les hypothèses de la proposition 4.3.9 avec $\arcsin\left(\dfrac{\kappa K}{2}\right) < \dfrac{\pi}{2p}$, ou de la proposition 4.3.10, $\widehat{L}(\lambda)$ admet un système complet de vecteurs propres généralisés.

On notera que dans le cadre des familles quadratiques il y a une grande différence pour les spectres de $L(\lambda)$ selon que $H_1 H_0^{-\frac{1}{2}}$ est seulement borné ou compact. Le modèle initial

$$L_P(\lambda) = -\Delta + (P - \lambda)^2$$

est dans le premier cas c'est ce qui rend l'étude spectrale de ce problème difficile, alors que dans le deuxième cas on obtient une localisation du spectre et l'existence d'une infinité de valeurs propres avec un système complet de fonctions propres généralisées.

5

Méthode des traces pour les familles quadratiques d'opérateurs pseudodifférentiels

Sommaire

Dans ce chapitre nous étudions des familles d'opérateurs quadratiques semi-classiques et quasi-homogènes.

On rappelle que pour la famille quadratique d'opérateurs :

$$L_P(\lambda) = -\Delta + (P(x) - \lambda)^2 \ , \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5.1}$$

on dit que L_P est une famille homogène (quasi-homogène) d'opérateurs, lorsque P est homogène (quasi-homogène).

Pour le cas semi-classique nous étudions la transformation d'un problème d'opérateurs avec polynômes homogènes dans une forme semi-classique, et nous donnons quelques résultats de Helffer-Robert-Wang [15] et Robert [27]. De plus nous étudions des familles d'opérateurs avec petits paramètres [29].

Nous étudions des familles quadratiques quasi-homogènes d'opérateurs du type d'homogénéité :

$$(\frac{k_1}{M}, \cdots, \frac{k_n}{M}, 1, \cdots, 1)$$

dans le cas n pair et nous donnons un exemple dans le cas $n = 2$. La condition n pair est une condition nécessaire avec ce genre de homogénité. Lorsque n impair, il n'est pas possible de conclure l'existence des solutions dès le premier coefficient, $c_{0,m}(\lambda)$, de la forme asymptotique de la trace de $(\hat{\mathcal{A}}_L + \lambda)^{-m}$ ($\hat{\mathcal{A}}_L$ est le système non-autoajoint associé à la famille d'opérateurs L_P), parce que ce coefficient est nul. On étudie la famille (5.1) avec P est un polynôme quasi-homogène d'ordre M et de type $(k_1, \cdots, k_n)$.

Pour chaque cas on prouve l'existence de solutions non nulles en utilisant la même technique de Helffer-Robert-Wang [15] et Robert [27] et en utilisant le théorème de Lidskii.

En suite nous traitons des familles d'opérateurs quadratiques du certain type d'homogénéité pour le cas n quelconque. Pour ces familles on étudie les conditions pour lesquelles on peut prouver l'existence des valeurs propres.

5.1 Calculs semi-classiques

On considère la famille quadratique suivante :

$$L_P(\lambda) = -\Delta + (P(x) - \lambda)^2,$$

où P est un polynôme elliptique homogène de degré $m \geq 2$ dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.
On expose les résultats de Helffer-Robert-Wang [15] et Robert [27].
En utilisant le changement de variable $x = \tau y$ avec $h = \tau^{-1-m}$ et $\mu = \frac{\lambda}{\tau^m} + 1$, alors pour toutes fonctions $u \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ et $v \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ on a

$$u(x) = u(\tau y) = v(y), \quad x = \tau y.$$

De plus

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}(v(y)) \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_j^2} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} v(y) \\ &= \frac{1}{\tau^2} \Delta_y v(y)\end{aligned}$$

par suite pour la transformation linéaire inversible T de $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ on obtient :

$$\begin{aligned}Tu(y) &= u(\tau y) \\ &= v(y),\end{aligned}$$

d'où

$$T^{-1} v(y) = u(y),$$

on a alors

$$\begin{aligned}L_P(\lambda) u(x) &= \tau^{2m}(-\tau^{-2-2m} \Delta_y + (P(y) + 1 - \mu)^2) v(y) \\ &= \tau^{2m}(-h^2 \Delta_y + (P(y) + 1 - \mu)^2)) v(y) \\ &= \tau^{2m}(\widehat{H}(\mu)(T(u(y)))\end{aligned}$$

où

$$\widehat{H}(\mu) = -h^2\Delta_y + (P(y) + 1 - \mu)^2.$$

On a

$$L_P(\lambda)(u(\tau y)) = \tau^{2m}(\widehat{H}(\mu)(T(u(y)))$$

ce qui entraîne

$$L_P(\lambda)(T(u(y))) = \tau^{2m}(\widehat{H}(\mu)(T(u(y)))$$

et

$$T(L_P(\lambda)(u(y))) = \tau^{2m}(\widehat{H}(\mu)(T(u(y)))$$

donc

$$L_P(\lambda)(u(y)) = \tau^{2m}T^{-1}(\widehat{H}(\mu)(T(u(y)))$$

par conséquent

$$L_P(\lambda)(u(x)) = \tau^{2m}T^{-1}\widehat{H}(\mu)T$$

donc $L_P(\lambda)$ est similaire à $\widehat{H}(\mu)$.

$\widehat{H}(\mu)$ est le h-Weyl opérateur avec le symbole $H(\mu, y, \eta) = \eta^2 + (P(y) + 1 - \mu)^2$. On utilise ici la notation $\widehat{H}$ pour l'opérateur où le symbole H est le h-symbole de Weyl.

La famille semi-classique quadratique $\widehat{H}(\mu)$ est associée à un opérateur de matrice non autoadjoint $\widehat{A}_L$ dans $D(\widehat{H}_0^{\frac{1}{2}}) \times D(\widehat{H}_0^{\frac{1}{2}})$

$$\widehat{A}_L = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{H}_0^{\frac{1}{2}} \\ -\widehat{H}_0^{\frac{1}{2}} & -\widehat{H}_1 \end{pmatrix},$$

où $\widehat{H}_0 = -h^2\Delta_y + (P(y) + 1)^2$ et $\widehat{H}_1 = -2(P(y) + 1)$.

Le $h-$symbole $A(y, \eta)$ de $\widehat{A}_L$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & H_0^{\frac{1}{2}} \\ -H_0^{\frac{1}{2}} & -H_1 \end{pmatrix},$$

où $H_0 = |\xi|^2 + (P(y) + 1)^2$, $H_1 = -2(P(y) + 1)$, donc $A(x, \xi) \in \mathbb{S}^1_{\frac{1}{m},1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Le symbole a deux valeurs propres

$$\mu_\pm(y, \eta) = (P(y) + 1) \pm i\eta.$$

On trouve le résultat suivant (c.f. [33], [28]).

Théorème 5.1.1. *Pour tout réel $s < -\frac{n(m+1)}{m}$, dans le régime semi-classique $h \searrow 0$, on a*

$$Tr(\widehat{A}_L^s) \asymp \sum_{j=0}^{N-1} c_{j,s} h^{j-n} + \mathcal{O}(h^{N-n}), \tag{5.2}$$

avec

$$c_{j,s} = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} tr(b_j(x,\xi))\lambda^s d\lambda dx d\xi.$$

où $b_j(x,\xi)$ sont les termes de la paramétrix $(\widehat{A}_L - \lambda)^{-1}$, et

$$\begin{aligned} c_{0,s} &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_{\Lambda} \Re(\mu_+(x,\xi))^s dx d\xi, \\ c_{1,s} &= 0. \end{aligned}$$

Preuve :

Montrons tout d'abord la forme (5.2).

On a :

$$\widehat{A}_L^s = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} (\widehat{A}_L - \lambda)^{-1} \lambda^s d\lambda,$$

où Γ est le contour défini par les demi-droites $\arg\lambda = \theta$ et $\arg\lambda = -\theta$ pour $|\lambda| \geq \gamma_1$ et par l'arc de cercle $|\lambda| = \dfrac{\gamma_1}{2}$ pour $-\theta \leq \arg\lambda \leq \theta$.
L'opérateur $\widehat{A}_L$ avec le $h-$symbole $(A(x,\xi) - \lambda)$ (c.f. définitions B.4.2 et B.4.1), i.e.

$$(A(x,\xi) - \lambda) \in \mathbb{S}^m_{\phi,\varphi}(\mathbb{R}^{2n})$$

pour des fonctions poids et $m(x,\xi) = \phi(x,\xi) = \varphi(x,\xi) = (1 + |x|^2 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$. Donc le $h-$symbole de $(\widehat{A}_L - \lambda)^{-1}$ a la forme asymptotique :

$$b_\lambda(h) \asymp \sum_{i\geq 0} b_i h^i,$$

dans le sens où (c.f. définition (B.4.3))

$$b_\lambda(h) = \sum_{j=0}^{N-1} h^j . b_j + h^N r_N(h)$$

où b_j vérifié les estimations en (4.29) et $r_N(h)$ décrit une partie bornée et qui vérifie les estimations en (4.30) pour $m(x,\xi) = \phi(x,\xi) = \varphi(x,\xi) = (1+|x|^2+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$, où

$$\begin{aligned}
b_0 &= (A-\lambda)^{-1}, \\
b_j &= -(A-\lambda)^{-1} \sum_{|\alpha|+|\beta|+l=j, l\leq j} \Gamma_j(\alpha,\beta) \left(\partial_\xi^\alpha D_x^\beta (A-\lambda)\right) \left(\partial_\xi^\beta D_x^\alpha b_l\right),
\end{aligned}$$

avec

$$\Gamma_j(\alpha,\beta) = \frac{(-1)^\beta}{2^j \alpha! \beta!}.$$

On a

$$(\widehat{A}_L - \lambda)^{-1} = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{ih^{-1}(x-y)\cdot\xi} b_\lambda(h) dy d\xi.$$

de la définition de $\widehat{A}_L^s$ on obtient

$$\widehat{A}_L^s = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_\Lambda \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{ih^{-1}(x-y)\cdot\xi} b_\lambda(h) \lambda^s dy d\xi d\lambda.$$

d'où

$$Tr(\widehat{A}_L^s) = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_\Lambda \int_{\mathbb{R}^{2n}} tr(b_\lambda(h)) \lambda^s dy d\xi d\lambda.$$

et de la forme asymptotique de $b_\lambda(h)$ on a la forme asymptotique de trace :

$$Tr(\widehat{A}_L^s) \asymp \sum_{j\geq 0} c_{j,s} h^{j-n},$$

où

$$c_{j,s} = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_\Lambda tr(b_j) \lambda^s d\lambda dx d\xi.$$

On calcule $c_{0,s}$. Or si μ_j est une valeur propre de A alors $(\mu_j-\lambda)^{-1}$ est une valeur propre de $(A-\lambda)^{-1}$ donc

$$\begin{aligned}\frac{i}{2\pi}\int tr(b_0)\lambda^s d\lambda &= \frac{i}{2\pi}\int tr(A-\lambda)^{-1}\lambda^s d\lambda\\ &= \frac{i}{2\pi}\int_\Lambda \sum_{j,\mu_j\in\sigma(A)} (\mu_j-\lambda)^{-1}\lambda^s d\lambda\\ &= \frac{i}{2\pi}\sum_{j,\mu_j\in\sigma(A)}\int_C (\mu_j-\lambda)^{-1}\lambda^s d\lambda\\ &= \sum_{j,\mu_j\in\sigma(A)} \mu_j^s\end{aligned}$$

où $\sigma(A)$ est le spectre de A qui est une matrice avec deux valeurs propres $\mu_\mp$, alors :

$$\begin{aligned}c_{0,s} &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^{2n}}((\mu_+)^s+(\mu_-)^s)dxd\xi\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^{2n}}\Re((\mu_+)^s)dxd\xi.\end{aligned}$$

Comme $b_1=0$, donc $c_{1,s}=0$. $\square$

Grâce au théorème de Lidskii il suffit de prouver qu'il existe $s<\frac{-n(m+1)}{m}$ et $j\in\mathbb{N}$ tel que $c_{j,s}\neq 0$, pour démontrer que L_P a un spectre non vide.

On prouve alors le résultat suivant (c.f. [27]).

Lemme 5.1.1. *Si $m\geq 2$ et n pair alors pour tout $s<\frac{-n(m+1)}{m}$, $c_{0,s}\neq 0$.*

Preuve :

On a

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}}\mu_+^s(x,\xi)dxd\xi=\int_{\mathbb{R}^n}(P(x)+1)^{s+n}dx\int_{\mathbb{R}^n}(1+i|\eta|)^s d\eta.$$

Pour calculer $f_s(i)$, on pose :

$$f_s(\alpha)=\int_{\mathbb{R}^n}(1+\alpha|\eta|)^s d\eta,\quad \textit{pour } \alpha>0.$$

On fait le changement de variables :

$$\eta' = \alpha\eta \Rightarrow d\eta' = \alpha^n d\eta,$$

donc on a $f_s(\alpha) = \alpha^{-n} f(1)$, par un prolongement analytique de $f_s(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on peut alors poser $\alpha = i$, d'où $\Re(f_s(i)) = \cos(\frac{n\pi}{2}) f_s(1)$ et $f_s(1) > 0$. On a donc $\Re(f_s(i)) = 0$ si n impair et $\Re(f_s(i)) = \cos(\frac{n\pi}{2}) f_s(1) \neq 0$ si n pair. Donc la démonstration du lemme est achevée. □

5.1.1 Opérateurs avec un petit paramètre

On considère la famille d'opérateurs :

$$L_\eta(\lambda) = -\Delta_x + (P(x) - \lambda)^2 + \eta^2, \tag{5.3}$$

avec P un polynôme elliptique positif et homogène de degré $m \geq 2$, $\eta > 0$ est un paramètre assez grand. On traite l'opérateur semi-classique associé à $L_\eta(\lambda)$, avec $h = \eta^{-\frac{m+1}{m}}$ et $\mu = \frac{\lambda}{\eta}$ et en faisant le changement de variable comme précédemment on a

$$L_\eta(\lambda) = \eta^2(-h^2\Delta_y + (P(y) - \mu)^2 + 1). \tag{5.4}$$

Proposition 5.1.1. *On a la forme asymptotique (5.2) avec :*

$$c_{0,s} = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^{2n}} 2\Re\left(P(x) + i\sqrt{1+\xi^2}\right)^s dx d\xi.$$

De plus $c_{0,s} \neq 0$.

Preuve :

La preuve de la forme asymptotique de la trace est analogue à celle du théorème 5.1.1. Le terme principal de la forme asymptotique de la trace est

$$\begin{aligned} c_{0,s} &= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^{2n}} 2\Re\left(P(x) + i\sqrt{1+\xi^2}\right)^s dx d\xi \\ &= \gamma_s \cos\left(\frac{(n+sm)\pi}{2m}\right) \end{aligned}$$

où $\gamma_s \neq 0$. Donc pour tout $n \geq 1$, il existe $s < -\frac{n(m+1)}{m}$ tel que $c_{0,s} \neq 0$. $\square$

En utilisant la proposition précédente et le théorème de Lidskii on a alors le résultat suivant.

Proposition 5.1.2. *Il existe $\eta_0 > 0$, suffisamment grand, tel que pour tout $\eta \geq \eta_0$, $L_\eta(\lambda)$ admet un spectre non vide.*

Remarque 5.1.1. *Avec la condition $\eta \geq \eta_0$ et $\eta_0 > 0$, l'existence de valeurs propres pour la famille d'opérateurs $L_\eta(\lambda)$ est garanti pour toutes dimensions $n \geq 1$.*

5.2 Critère de rang k

Nous étudions maintenant le critère de rang k pour la famille d'opérateurs dans (3.4) avec P un polynôme quasi-homogène d'ordre M et de type $(k_1, \cdots, k_n)$ i.e.

$$P(r^{k_1}x_1, \cdots, r^{k_n}x_n) = r^M P(x_1, \cdots, x_n),$$

où $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. La proposition suivante donne le critère de rang k pour les familles d'opérateurs quasi-homogènes, cette proposition est un résultat directe du théorème 3.2.1.

Proposition 5.2.1. ***(Critère de rang k)***
Pour la famille d'opérateurs dans (3.4) avec P un polynôme quasi-homogène de degré M et de type $(k_1, \cdots, k_n)$. Pour $k \geq n+1$ et $k_1 + \cdots + k_n < M$ si

$$Tr\,(\mathcal{A}_L + \tau)^{-k} \neq 0, \tag{5.5}$$

alors il existe λ_0, $u_0 \neq 0$, $u_0 \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ tels que $L(\lambda_0)u_0 = 0$.

Preuve :

On commence par prouver ce résultat pour $n = 2$ alors il faut vérifier le critère de rang 3, i.e. on prend $k = 3$. En utilisant lemme 3.2.2 l'opérateur

$$Tr\,(\mathcal{A}_L + \tau)^{-3} = \frac{d^2}{d\tau^2}\left[-L^{-1}(\tau)L'(\tau)\right].$$

Pour les symboles $L(\tau;x,\xi)$, $L'(\tau;x,\xi)$ on a les estimations suivants, pour des fonctions poids ϕ, φ, m, il existe des constantes $C_0(\alpha,\beta)$, $C_1(\alpha,\beta)$ telles que :

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta L(\tau;x,\xi)\right| \leq C_0(\alpha,\beta) m(x,\xi)\varphi^{-|\alpha|}\phi^{-|\beta|},$$

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta L'(\tau;x,\xi)\right| \leq C_0(\alpha,\beta) \sqrt{m(x,\xi)}\varphi^{-|\alpha|}\phi^{-|\beta|},$$

où $m(x,\xi) = \phi(x,\xi) = \varphi(x,\xi) = (1 + x_1^{k_1} + x_2^{k_2} + \xi_1^2 + \xi_2^2)^{\frac{1}{2}}$ en utilisant lemme B.5.1 cet opérateur est de classe trace si $k_1 + k_2 < M$ parce que

$$\int_{\mathbb{R}^4} \frac{1}{(1 + x_1^{k_1} + x_2^{k_2} + \xi_1^2 + \xi_2^2)^{\frac{p}{2}}} dxd\xi < +\infty, \; lorque \, k_1 + k_2 < M.$$

D'où la trace suivante :

$$Tr\left(\frac{d^2}{d\tau^2}\left[-L^{-1}(\tau)L'(\tau)\right]\right)$$

est définie. Si cette trace est non nulle, on utilise alors le théorème 3.2.1 on a le résultat.

Pour n quelconque on prend $k = n + 1$. En utilisant lemme B.5.1 avec :

$$m(x,\xi) = (1 + x_1^{k_1} + \cdots + x_n^{k_n} + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

la trace dans (5.5) est défini pour $k_1 + \cdots + k_n < M$.

Donc si la condition dans (5.5) est satisfaite, alors en utilisant le théorème 3.2.1 la démonstration est terminée. $\square$

5.3 n pair

Nous prouvons ici l'existence de valeurs propres pour la famille d'opérateurs quasi-homogènes de type $(\frac{k_1}{M}, \cdots, \frac{k_n}{M}, 1, \cdots, 1)$ pour le cas de la dimension n paire. Ce cas a déjà été étudié par Helffer-Robert-Wang [15], mais pour des familles d'opérateurs homogènes.

5.3.1 La famille $L_P(\lambda)$ du type $(\frac{k_1}{M}, \cdots, \frac{k_n}{M}, 1, \cdots, 1)$

On considère la famille d'opérateurs :

$$L_P(\lambda) = -\Delta + (P(x) - \lambda)^2, \tag{5.6}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et Δ est le Laplacien par rapport à $x = (x_1, \cdots, x_n)$ i.e.

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_{x_1} + \cdots + \Delta_{x_n},$$

et $P(x)$ est un polynôme positif et quasi-homogène d'ordre M et de type $(k_1, \cdots, k_n)$, i.e.

$$P(\rho^{k_1} x_1, \cdots, \rho^{k_n} x_n) = \rho^M P(x_1, \cdots, x_n).$$

Exemple

On commence par traiter l'exemple étudié dans le chapitre **??** en utilisant la technique de rayons de croissance minimale.
On considère la famille d'opérateurs :

$$L_P(\lambda) = -(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) + (x^2 + y^4 + \lambda)^2,\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{5.7}$$

On prouve le résultat suivant.

Théorème 5.3.1. *Soit L_P l'opérateur en (5.7) avec $P = x^2 + y^4$ défini sur $\mathbb{R}^2$. Alors il existe λ_0 et $u_0 \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^2)$, $u_0 \neq 0$ tel que $L_P(\lambda_0)u_0 = 0$.*

Preuve :

Pour la preuve on veut utiliser le théorème de Lidskii en étudiant la trace de la famille linéaire d'opérateurs matriciels associé à $L_P(\lambda)$.
On associe alors à $L_P(\lambda)$, l'opérateur matriciel $\widehat{\mathcal{A}}_L$ défini dans $D(\widehat{H}_0^{\frac{1}{2}}) \times D(\widehat{H}_0^{\frac{1}{2}})$ tel que :

$$\widehat{\mathcal{A}}_L = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{H}_0^{\frac{1}{2}} \\ -\widehat{H}_0^{\frac{1}{2}} & -\widehat{H}_1 \end{pmatrix},$$

où $\widehat{H}_0 = -\Delta_{x,y} + P^2(x, y)$, $\widehat{H}_1 = -2P(x, y)$. Le symbole de $\widehat{\mathcal{A}}_L$ est

$$A_L = \begin{pmatrix} 0 & H_0^{\frac{1}{2}} \\ -H_0^{\frac{1}{2}} & -H_1 \end{pmatrix},$$

où $H_0 = \xi^2 + \eta^2 + P^2(x, y)$ et $H_1 = -2P(x, y)$, alors le symbole A_L a deux valeurs propres complexes

$$\mu_\pm = P(x, y) \pm i\sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \tag{5.8}$$

En utilisant la définition (B.3.2) on a que A_L est quasi-homogène de degré 1 et de type $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1, 1)$ i.e. $A_L(\rho^{\frac{1}{2}}x, \rho^{\frac{1}{4}}y, \rho\xi, \rho\eta) = \rho A_L(x, y, \xi, \eta)$ avec

$$\|D^\alpha_{x,y}\partial^\beta_{\xi,\eta}A_L(x, y, \xi, \eta)\| \leq C(\alpha, \beta)m(x, y, \xi, \eta)\phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|},$$

pour une constante $C(\alpha,\beta)$ et

$$m(x,y,\xi,\eta)=\phi(x,y,\xi,\eta)=\varphi(x,y,\xi,\eta)=(1+|x|^2+|y|^4+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.9)$$

On étudie $Tr(\widehat{\mathcal{A}}_L+\lambda)^{-m}$, $\lambda\to\infty$, m réel suffisamment grand, en utilisant le lemme (B.5.1) on a que $(A_L+\lambda)^{-m}$ est de classe trace lorsque :

$$m>\frac{11}{4}.$$

Le symbole $B(x,y,\xi,\eta,\lambda)$ de la paramétrix $(\widehat{\mathcal{A}}_L+\lambda)^{-m}$ est donné par la forme asymptotique :

$$B(x,y,\xi,\eta,\lambda)\asymp\sum_{j=0}^{N}b_{j,\lambda}(x,y,\xi,\eta)+R^{(N)}(x,y,\xi,\eta,\lambda),$$

où

$$\begin{aligned} b_{0,\lambda}(x,y,\xi,\eta)= &\ (A_P+\lambda)^{-m} \\ b_{j,\lambda}(x,y,\xi,\eta)= &\ -b_{0,\lambda}\sum_{\Lambda}\Gamma(\alpha,\beta)\partial^{\alpha}_{\xi,\eta}D^{\beta}_{x,y}(A_P+\lambda)^{m}\partial^{\beta}_{\xi,\eta}D^{\alpha}_{x,y}b_{l,\lambda} \end{aligned} \quad (5.10)$$

et

$$\Lambda=\{|(\underline{\frac{1}{2}}+\underline{1}).(\alpha+\beta)|+l=j+1,l\le j\},$$

avec $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ et $\beta=(\beta_1,\beta_2)$ donc

$$|(\underline{\frac{1}{2}}+\underline{1}).(\alpha+\beta)|=\frac{3}{2}(\alpha_1+\beta_1)+\frac{5}{4}(\alpha_2+\beta_2).$$

de plus b_j et $R^{(N)}$ vérifient les estimations donné dans (4.31) avec les fonctions de poids $m(x,\xi)$, $\phi(x,\xi)$, $\varphi(x,\xi)$ telles que :

$$m(x,y,\xi,\eta)=(1+|x|^2+|y|^4+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{m}{2}},$$

$$\phi(x,\xi)=\varphi(x,\xi)=(1+|x|^2+|y|^4+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} Tr(\widehat{\mathcal{A}}_L+\lambda)^{-m} &\asymp \sum_{j=0}^{N-1}\int_{\mathbb{R}^4} tr(b_j(x,y,\xi,\eta,\lambda))dxdyd\xi d\eta + \mathcal{O}(\lambda^{\frac{-4m+11}{4}-\delta_N}) \\ &\asymp \sum_{j=0}^{N-1} c_{j,m}(\lambda) + \mathcal{O}(\lambda^{\frac{-4m+11}{4}-\delta_N}) \end{aligned}$$

où δ_N dépend de type de homogénéité de $L(x,y,\xi,\eta,\lambda)$ et

$$c_{j,m}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^4} tr(b_{j,\lambda}(x,y,\xi,\eta))dxdyd\xi d\eta.$$

On a

$$tr(b_0) = (\mu_+ +\lambda)^{-m} + (\mu_- +\lambda)^{-m} = \Re((\mu_+ +\lambda)^{-m}),$$

alors on calcule l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^4} tr(b_{0,\lambda}(x,y,\xi,\eta))dxdyd\xi d\eta$$

en faisant le changement de variable :

$$\begin{aligned} x &= \lambda^{\frac{1}{2}}x' &\Rightarrow\quad dx &= \lambda^{\frac{1}{2}}dx' \\ y &= \lambda^{\frac{1}{4}}y' &\Rightarrow\quad dy &= \lambda^{\frac{1}{4}}dy' \\ \xi &= \lambda\xi' &\Rightarrow\quad d\xi &= \lambda d\xi' \\ \eta &= \lambda\eta' &\Rightarrow\quad d\eta &= \lambda d\eta' \end{aligned} \tag{5.11}$$

on obtient

$$\begin{aligned} c_{0,m} &= \int_{\mathbb{R}^4} tr(b_{0,\lambda}(x,y,\xi,\eta))dxdyd\xi d\eta \\ &= \lambda^{\frac{-m+11}{4}}\int_{\mathbb{R}^4}\left(\Re\left((\mu_+(x',y',\xi',\eta')+1)^{-m}\right)\right)dx'dy'd\xi'd\eta', \end{aligned}$$

on pose

$$c_0 = \int_{\mathbb{R}^4}\left(\Re\left((\mu_+(x',y',\xi',\eta')+1)^{-m}\right)\right)dx'dy'd\xi'd\eta'$$

On commence par définir $f(\alpha)$ pour $\alpha\in\mathbb{C}$, $\Re(\alpha)>0$ tels que :

$$f(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^4}(x'^2+y'^4+1+\alpha\sqrt{\xi'^2+\eta'^2})^{-m}dx'dy'd\xi'd\eta'$$

pour $\alpha > 0$, on fait le changement de variables :

$$\xi' = \frac{1}{\alpha}\xi'' \quad \Rightarrow \quad d\xi' = \frac{1}{\alpha}d\xi''$$

$$\eta' = \frac{1}{\alpha}\eta'' \quad \Rightarrow \quad d\eta' = \frac{1}{\alpha}d\eta''$$

on obtient

$$f(\alpha) \;=\; \frac{1}{\alpha^2}\int_{\mathbb{R}^4}(x'^2 + y'^4 + 1 + \sqrt{\xi''^2 + \eta''^2})^{-m}dx'dy'd\xi''d\eta''.$$

Par prolongement analytique de $f(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on peut alors prendre $\alpha = i$, d'où on a

$$c_0 = \Re(f(i)) \;=\; -\int_{\mathbb{R}^4}(x'^2 + y'^4 + 1 + \sqrt{\xi''^2 + \eta''^2})^{-m}dx'dy'd\xi''d\eta''$$

pour calculer l'intégrale précédente on fait le changement de variables :

$$\begin{aligned}
\xi'' &= (1 + x'^2 + y'^4)\xi''' \quad \Rightarrow \quad d\xi'' = (1 + x'^2 + y'^4)d\xi''' \\
\eta'' &= (1 + x'^2 + y'^4)\eta''' \quad \Rightarrow \quad d\eta'' = (1 + x'^2 + y'^4)d\eta'''
\end{aligned}$$

on obtient

$$c_0 = \int_{\mathbb{R}^2}(x'^2 + y'^4 + 1)^{2-m}dx'dy'\int_{\mathbb{R}^2}(1 + \sqrt{\xi'''^2 + \eta'''^2})^{-m}d\xi'''d\eta'''$$

d'où $c_0 \neq 0$ (une intégrale des fonctions positives).

Donc on a la forme asymptotique :

$$Tr(\widehat{\mathcal{A}}_L + \lambda)^{-m} \asymp c_{0,m}\lambda^{\frac{-4m+11}{4}} + c_{3,m}\lambda^{\frac{-4m+11}{4}-3} + \mathcal{O}(\lambda^{\frac{-4m+11}{4}-4}) \,,$$

où $m > \frac{11}{4}$ et

$$c_{3,m} = \int_{\mathbb{R}^4} b_3'(x, y, \xi, \eta)dxdyd\xi d\eta,$$

où b_3' est obtenu de b_3 en faisant le changement de variables (5.11) et la factorisation par $\lambda^{\frac{-4m+11}{4}-3}$.

En utilisant le théorème de Lidskii et la coïncidence des spectres de $L_P(\lambda)$ et $\widehat{\mathcal{A}}_L$ il résulte alors que la famille d'opérateurs $L_P(\lambda)$ admet des valeurs propres non-nulles, ce qui achève la démonstration. □

Preuve de l'existence de valeurs propres non nulles pour la famille (5.6)

On reprend maintenant l'étude de la famille quadratique d'opérateurs dans (5.6). Commençons par énoncer le résultat suivant.

Théorème 5.3.2. *Pour n pair, si L_P est l'opérateur défini dans (5.6). Alors il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ et $u_0 \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, $u_0 \neq 0$ tel que $L_P(\lambda_0)u_0 = 0$.*

Proposition 5.3.1. *Pour l'opérateur $\widehat{\mathcal{A}}_L$ dans (5.12) défini dans $D(\widehat{H}_0^{\frac{1}{2}}) \times D(\widehat{H}_0^{\frac{1}{2}})$ où P est un polynôme positif et quasi-homogène d'ordre M et de type $(k_1, \cdots, k_n)$, n est pair. Pour*

$$m > \frac{(k_1 + \cdots + k_n + nM)}{M}$$

et $\lambda \to +\infty$ on a alors

$$Tr(\widehat{\mathcal{A}}_L + \lambda)^{-m} \asymp \sum_{j=0}^{N-1} c_{j,m}(\lambda) + \mathcal{O}(\lambda^{\alpha_0 - \delta_N}),$$

où δ_N dépend de $k_1, \cdots, k_n, M$, et

$$c_{j,m}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} b_{j,\lambda}(x, \xi) dx d\xi,$$

où $b_{j,\lambda}$, $j \geq 0$ sont les termes du symbole de la paramétrix de $(\widehat{A}_L + \lambda)^m$. Plus précisément

$$Tr(\widehat{\mathcal{A}}_L + \lambda)^{-m} \asymp c_0 \lambda^{\alpha_0} + c_{\delta_1'} \lambda^{\alpha_0 - \delta_1'} + \mathcal{O}(\lambda^{\alpha_0 - \delta_2''}),$$

où

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= -m + \tfrac{(k_1+M)}{M} + \cdots + \tfrac{(k_n+M)}{M},\\
\delta_1 &= \max\left\{\tfrac{1}{s_1}+1, \cdots, \tfrac{1}{s_n}+1\right\},\\
\delta_2 &= \max\left\{\left\{\tfrac{1}{s_1}+1, \cdots, \tfrac{1}{s_n}+1\right\} \setminus \{\delta_1\}\right\},\\
c_0 &= -\int_{\mathbb{R}^n} (1+P(x))^{-m+n}\, dx \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{-m}\, d\xi,\\
c_{\delta_1',m} &= c_{\delta_1'} \lambda^{\alpha_0-\delta_1}\\
&= -\int_{\mathbb{R}^{2n}} b_{\delta_1',\lambda}(x,\xi) dx d\xi.
\end{aligned}$$

avec δ_1', δ_2' *sont les numérateurs de* δ_1, δ_2 *respectivement,* $\delta_1' < \delta_2'' \leq \delta_2'$, *et* $M = s_i k_i$ $i = 1, \cdots, n$. *De plus,* $c_0 \neq 0$.

Preuve :

On associe à $L_P(\lambda)$ dans (5.6) l'opérateur matriciel non-autoadjoint $\widehat{\mathcal{A}}_L$ dans $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n) \times \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ tel que :

$$\widehat{\mathcal{A}}_L = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{H}_0^{\frac{1}{2}} \\ -\widehat{H}_0^{\frac{1}{2}} & -\widehat{H}_1 \end{pmatrix}, \tag{5.12}$$

où $\widehat{H}_0 = -\Delta + P^2(x)$, $\widehat{H}_1 = -2P(x)$. Le symbole de $\widehat{\mathcal{A}}_L$ est A_L tel que :

$$A_L = \begin{pmatrix} 0 & H_0^{\frac{1}{2}} \\ -H_0^{\frac{1}{2}} & -H_1 \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

avec

$$H_0 = |\xi|^2 + P^2(x)\ , \quad H_1 = -2P(x)\ , \quad x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Donc A_L est quasi-homogène de degré 1 et de type $(\underline{M}, \underline{1})$ avec

$$\underline{M} = (\frac{k_1}{M}, \cdots, \frac{k_n}{M})\ , \quad \underline{1} = \underbrace{(1, \cdots, 1)}_{n-fois}$$

L'opérateur $(\widehat{\mathcal{A}}_L+\lambda)^m$ avec le symbole $(A_L(x,\xi)+\lambda)^m$ de degré m et de type $(\underline{M},\underline{1})$.En utilisant le lemme B.5.1, cet opérateur est de classe trace pour

$$m>\frac{(k_1+\cdots+k_n+nM)}{M}. \tag{5.14}$$

Le symbole matriciel A_L a les deux valeurs propres complexes :

$$\mu_{\pm}=P(x,y)\pm i\sqrt{|\xi|^2+|\eta|^2}.$$

La paramétrix $(\widehat{\mathcal{A}}_L+\lambda)^{-m}$ avec le symbole $B(x,\xi,\lambda)$ de degré $-m$ et de type $(\underline{M},\underline{1})$ et de la forme asymptotique de B est la suivante :

$$B(x,\xi,\lambda)\asymp\sum_{j=0}^{N-1}b_{j,\lambda}(x,\xi)+R^{(N)}(x,\xi,\lambda),$$

tel que :

$$\begin{aligned} b_{0,\lambda}(x,\xi)= &\quad (A_P(x,\xi)+\lambda)^{-m},\\ b_{j,\lambda}(x,\xi)= &\quad -b_{0,\lambda}(x,\xi)\textstyle\sum_{\Lambda}\Gamma(\alpha,\beta)\partial_\xi^\alpha D_x^\beta(A_P(x,\xi)+\lambda)^m\partial_\xi^\beta D_x^\alpha b_{l,\lambda}(x,\xi)\end{aligned} \tag{5.15}$$

avec

$$\Lambda=\{|(\underline{M}+\underline{1}).(\alpha+\beta)|+l=j+1,l\le j\},$$

et

$$\begin{aligned} |(\underline{M}+\underline{1}).(\alpha+\beta)| &= \tfrac{(k_1+M)}{M}(\alpha_1+\beta_1)+\cdots+\tfrac{(k_n+M)}{M}(\alpha_n+\beta_n),\\ &= \tfrac{(1+s_1)}{s_1}(\alpha_1+\beta_1)+\cdots+\tfrac{(1+s_n)}{s_n}(\alpha_n+\beta_n),\end{aligned}$$

où $M_i=s_ik_i$, $i=1,\cdots,n$, les multi-indices α et β sont tels que :

$$\begin{aligned}\alpha &= (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n\\ \beta &= (\beta_1,\cdots,\beta_n)\in\mathbb{N}^n.\end{aligned}$$

De plus pour $b_{j,\lambda}$, $R^{(N)}$ on a les estimations en (4.31) avec les fonctions poids :

$$m(x,\xi)=(1+\sum_{j=1}^n|x_j|^{k_j}+\sum_{j=1}^n|\xi_j|^2)^{\frac{m}{2}},$$

$$\phi(x,\xi)=\varphi(x,\xi)=(1+\sum_{j=1}^n|x_j|^{k_j}+\sum_{j=1}^n|\xi_j|^2)^{\frac12}.$$

On a alors la forme asymptotique de la trace :

$$Tr\Big((\widehat{\mathcal{A}}_L+\lambda)^{-m}\Big) \asymp \sum_{j=0}^{N-1} c_{j,m}(\lambda) + \mathcal{O}(\lambda^N),$$

où

$$c_{j,m}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} tr(b_{j,\lambda}(x,\xi))dxd\xi$$

On commence par calculer le premier terme de cette forme asymptotique i.e. $c_{0,m}(\lambda)$ qui a la forme suivante :

$$\begin{aligned} c_{0,m}(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} tr(b_{0,\lambda}(x,\xi))dxd\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \Re(\mu_+(x,\xi)+\lambda)^{-m}dxd\xi, \end{aligned}$$

alors pour calculer cette intégrale on fait le changement de variables suivant :

$$\begin{array}{rclcrcl} x_1 = & \lambda^{\frac{k_1}{M}}x_1' & \Rightarrow & dx_1 = & \lambda^{\frac{k_1}{M}}dx_1' & , \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ x_n = & \lambda^{\frac{k_n}{M}}x_n' & \Rightarrow & dy \;=& \lambda^{\frac{k_2 n_2}{M}}dy', & \\ & & & & & \\ \xi_1 = & \lambda\xi_1' & \Rightarrow & d\xi_1 = & \lambda d\xi_1' & , \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \xi_n = & \lambda\xi_n' & \Rightarrow & d\xi_n = & \lambda d\xi_n' & , \end{array} \tag{5.16}$$

où $x' = (x_1',\cdots,x_n')$, $\xi' = (\xi_1',\cdots,\xi_n')$, on obtient alors

$$c_{0,m} = \lambda^{\alpha_0}\int_{\mathbb{R}^{2n}} \Re\left((\mu_+(x,\xi)+1)^{-m}\right)dx'd\xi'$$

avec

$$\alpha_0 = -m + \frac{(k_1+\cdots+k_n+nM)}{M},$$

avec la condition (5.14) sur m. On pose

$$c_0 = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \Re\left((\mu_+(x,\xi)+1)^{-m}\right)dx'd\xi'$$

i.e.

$$c_{0,m}(\lambda) = \lambda^{\alpha_0} c_0$$

alors pour $\alpha \in \mathbb{C}$ on suppose que :

$$f(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left((P(x') + 1 + \alpha|\xi'|\right)^{-m} dx' d\xi'.$$

pour $\alpha > 0$ réel, le changement de variables :

$$\begin{array}{ccc} \xi'_1 = \frac{1}{\alpha}\xi''_1 & \Rightarrow & d\xi'_1 = \left(\frac{1}{\alpha}\right) d\xi''_1, \\ \vdots & & \vdots \\ \xi'_n = \frac{1}{\alpha}\xi''_n & \Rightarrow & d\xi'_n = \left(\frac{1}{\alpha}\right) d\xi''_n, \end{array}$$

entraîne

$$f(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left((P(x') + 1 + |\xi''|\right)^{-m} dx' d\xi''.$$

par prolongement analytique de $f(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ on peut prendre $\alpha = i$, alors on obtient

$$\begin{aligned} c_0 &= \Re\left(f(i)\right) \\ &= \Re\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left(P(x') + 1 + |\xi''|\right)^{-m} dx' d\xi''. \end{aligned}$$

Pour le cas n <u>impair</u> $\Re\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n\right)\Big|_{\alpha=i} = 0$ et puis $c_0 = 0$. Mais pour le cas n <u>pair</u> on a

$$c_0 = -\int_{\mathbb{R}^{2n}} \left(P(x') + 1 + |\xi''|\right)^{-m} dx' d\xi''.$$

Pour trouver la valeur de c_0, on commence par faire le changement de variables :

$$\begin{array}{rlcrl} \xi''_1 = & (1 + P(x'))\xi'''_1 & \Rightarrow & d\xi''_1 = & (1 + P(x'))d\xi'''_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \xi''_n = & (1 + P(x'))\xi'''_n & \Rightarrow & d\xi''_n = & (1 + P(x'))d\xi'''_n \end{array}$$

on a alors

$$c_0 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + P(x')\right)^{-m+n_1+n_2} dx' \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi'''|\right)^{-m} d\xi''',$$

tel que $c_0 \neq 0$ parce que c'est une intégrale de fonctions positives.

On trouve le deuxième terme de la trace de $(\widehat{\mathcal{A}}_L + \lambda)^{-m}$ en posant

$$\delta_1 = \max\left\{\frac{1}{s_1} + 1, \cdots, \frac{1}{s_n} + 1\right\},$$

on suppose que

$$\delta_1 = \frac{1}{s_1} + 1$$

on pose $\delta'_1 = \delta_1 s_1$ alors on prend en considération le type d'homogénéité, $b_{\delta'_1,\lambda}$ est le deuxième terme lorsque $l = 0$ et $\alpha_1 + \beta_1 = s_1$ i.e. :

$$b_{\delta'_1,\lambda}(x,\xi) = \; -b_{0,\lambda}(x,\xi) \sum_{\alpha_1+\beta_1=s_1} \Gamma(\alpha_1,\beta_1)\partial_{\xi_1}^{\alpha_1} D_{x_1}^{\beta_1}(A_P(x,\xi)+\lambda)^m \partial_{\xi_1}^{\beta_1} D_{x_1}^{\alpha_1} b_{l,\lambda}(x,\xi)$$

En faisant le changement de variables (5.16) on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} tr(b_{\delta'_1,\lambda}(x,\xi))dxd\xi \;\; = \;\; \lambda^{\alpha_1} \int_{\mathbb{R}^{2n}} tr(b'_{\kappa M}(x',\xi'))dx'd\xi'.$$

où

$$\alpha_1 = -m + \frac{(k_1 \cdots + k_n + nM)}{M} - \delta'_1 = \alpha_0 - \delta'_1$$

et $b'_{\delta'_1}(x',\xi')$ est obtenu à partir de $b_{\delta'_1,\lambda}(x,\xi)$ après l'application du changement de variable (5.16) et en factorisation par λ^{α_1}. On voit que le calcul du deuxième terme n'est pas facile et cela est parmi les causes des difficultés rencontrées dans les problèmes aux valeurs propres non-linéaires. $\square$

Preuve du théorème 5.3.2 :

En utilisant la proposition précédente on a que la trace de $(\widehat{\mathcal{A}}_L + \lambda)^{-m}$ n'est pas nulle, alors grâce au théorème de Lidskii le spectre de $\widehat{\mathcal{A}}_L$ contient une valeur propre non nulle. De la coïncidence des spectres de L_P et $\widehat{\mathcal{A}}_L$ on obtient le résultat.

5.4 n quelconque

5.4.1 La famille $L_P(\lambda)$ du type $(\frac{k_1}{M}, \frac{k_2}{M}, \frac{2\ell_1}{M'}, \frac{2\ell_2}{M'})$

On considère l'opérateur $L_P(\lambda)$:

$$L_P(\lambda) = a(D_x, D_y) + (P(x,y) - \lambda)^2, \tag{5.17}$$

où P est un polynôme positif quasi-homogène d'ordre M et de type (k_1, k_2) et a est un opérateur pseudodifférentiel positif quasi-homogène d'ordre M' et de type (ℓ_1, ℓ_2) i.e :

$$\begin{aligned} P(\rho^{k_1}x, \rho^{k_2}y) &= \rho^M P(x,y), \\ a(\rho^{\ell_1}D_x, \rho^{\ell_2}D_y) &= \rho^{M'} a(D_x, D_y). \end{aligned}$$

où $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^n$.

Dans cette section on remplace le Laplacien par un opérateur elliptique ou quasi-elliptique à coefficients constants, pour cela on va pouvoir abandonner la condition n pair, cette condition va être remplacée par une autre condition dépendant du type d'homogénéité de a et ne dépend pas du type de homogénéité de P.

Exemple

On considère par exemple la famille quadratique d'opérateurs donné par la forme suivante :

$$L_P(\lambda) = D_x^4 - D_y^2 + (P(x,y) - \lambda)^2, x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R} \tag{5.18}$$

avec P un polynôme positif quasi-homogène de degré M et de type (k_1, k_2) i.e.

$$P(\rho^{k_1}x, \rho^{k_2}y) = \rho^M P(x,y), \quad x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}.$$

On prouve le résultat suivant.

Théorème 5.4.1. *Soit $L_P(\lambda)$ la famille quadratique d'opérateurs donnée dans (5.18). Alors il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ et $u_0 \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)$, $u_0 \neq 0$ tel que $L_P(\lambda_0)u_0 = 0$.*

Preuve :

On commence par associer à $L(\lambda)$ l'opérateur matriciel non autoadjoint $\widehat{A}_P$ dans $D(\widehat{H}_0^{\frac{1}{2}}) \times D(\widehat{H}_0^{\frac{1}{2}})$ tel que :

$$\widehat{\mathcal{A}}_L = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{H}_0^{\frac{1}{2}} \\ -\widehat{H}_0^{\frac{1}{2}} & -\widehat{H}_1 \end{pmatrix}, \tag{5.19}$$

où $\widehat{H}_0 = D_x^4 - D_y^2 + P^2(x,y)$, $\widehat{H}_1 = -2P(x,y)$, $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}$. Le symbole de $\widehat{\mathcal{A}}_L$ est

$$A_L = \begin{pmatrix} 0 & H_0^{\frac{1}{2}} \\ -H_0^{\frac{1}{2}} & -H_1 \end{pmatrix}, \tag{5.20}$$

où $H_0 = \xi^4 + \eta^2 + P^2(x,y)$ et $H_1 = -2P(x,y)$, alors le symbole A_L a deux valeurs propres complexes

$$\mu_\pm = P(x,y) \pm i\sqrt{\xi^4 + \eta^2}. \tag{5.21}$$

On a

$$A_L(\rho^{\frac{k_1}{M}} x, \rho^{\frac{k_2}{M}} y, \rho^{\frac{1}{2}}\xi, \rho\eta) = \rho A_L(x,y,\xi,\eta)$$

i.e. $\underline{M} = (\frac{k_1}{M}, \frac{k_2}{M})$, $\underline{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{2}, 1)$.

On utilise le fait que le spectre de la famille polynomiale $L_P(\lambda)$ et le spectre de la famille d'opérateurs $\widehat{\mathcal{A}}_L$ coïncident et puis on utilise le théorème de Lidskii en prouvant dans la proposition suivante que $Tr(\widehat{A}_P + \lambda)^{-m} \neq 0$, donc la démonstration sera ainsi achevée. $\square$

Le résultat suivant termine la preuve.

Proposition 5.4.1. *L'opérateur quasi-homogène $\widehat{\mathcal{A}}_L$ de la forme (5.19) est défini dans $D(\widehat{H}_0^{\frac{1}{2}}) \times D(\widehat{H}_0^{\frac{1}{2}})$ avec P un polynôme positif quasi-homogène de degré M et de type (k_1, k_2) pour*

$$m > \frac{2k_1 + k_2}{M} + 2,$$

et on a $\lambda \to +\infty$

$$\begin{aligned} Tr(\widehat{A}_P + \lambda)^{-m} &\asymp \sum_{j=0}^{N-1} c_{j,m}(\lambda) + \mathcal{O}(\lambda^{-N}) \\ &\asymp c_0\lambda^{\alpha_0} + c_1\lambda^{\alpha_0-\delta_0'} + \mathcal{O}(\lambda^{\alpha_0-\delta_1'}), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} c_{j,m}(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^6} tr(b_{j,\lambda}(x,y,\xi,\eta))dxdyd\xi d\eta, \quad x\in\mathbb{R}^2,\ y\in\mathbb{R} \\ c_0 &= -\int_{\mathbb{R}^3}(1+P(x,y))^{2-m}dxdy\int_{\mathbb{R}^3}(1+\sqrt{|\xi|^4+|\eta|^2})^{-m}d\xi d\eta \\ c_{\delta_0',m}(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^6} b_{\delta_0',\lambda}(x,y,\xi,\eta)dxdyd\xi d\eta \\ &= c_1\lambda^{\alpha_0-\delta_0}, \\ \alpha_0 &= -m+\tfrac{2k_1+k_2}{M}+2 \\ \delta_0 &= \max\{\tfrac{k_1}{M}+\tfrac{1}{2},\tfrac{k_2+M}{M}\} \\ \delta_1 &\le \{\{\tfrac{k_1}{M}+\tfrac{1}{2},\tfrac{k_2+M}{M}\}\setminus\{\delta_0\}\} \end{aligned}$$

où les $b_{j,\lambda}$ *sont les termes du symbole de la paramétrix de* $(\widehat{\mathcal{A}}_L+\lambda)^m$, δ_0', δ_1' *sont les numérateurs de* δ_0, δ_1 *respectivement. De plus* $c_0 \neq 0$.

Preuve :

On étudie $Tr(\widehat{\mathcal{A}}_L+\lambda)^{-m}$, $\lambda \to \infty$, m réel suffisamment grand. Le symbole $B(x,y,\xi,\eta,\lambda)$ de la paramétrix $(\widehat{\mathcal{A}}_L+\lambda)^{-m}$ est donné par la forme asymptotique :

$$B(x,y,\xi,\eta,\lambda) \asymp \sum_{j=0}^{N-1} b_{j,\lambda}(x,y,\xi,\eta) + R^{(N)}(x,y,\xi,\eta),$$

où

$$\begin{aligned} b_{0,\lambda}(x,y,\xi,\eta) = &\quad (A_L+\lambda)^{-m} \\ b_{j,\lambda}(x,y,\xi,\eta) = &\quad -b_{0,\lambda}\sum_{\Lambda}\Gamma(\alpha,\beta)\partial^{\alpha}_{\xi,\eta}D^{\beta}_{x,y}(A_L+\lambda)^m\partial^{\beta}_{\xi,\eta}D^{\alpha}_{x,y}b_{l,\lambda} \end{aligned} \tag{5.22}$$

avec

$$\Lambda = \left\{ |(\underline{M}+\underline{\frac{1}{2}}).(\alpha+\beta)| + l = j+1, l \leq j \right\}, \tag{5.23}$$

les multi-indices $\alpha \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, et $\beta \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ donc

$$|(\underline{M}+\underline{\frac{1}{2}}).(\alpha+\beta)| = (\frac{2k_1+M}{2M})(\alpha_1+\beta_1) + \frac{k_2+M}{M}(\alpha_2+\beta_2). \tag{5.24}$$

De plus $b_{j,\lambda}$ et $R^{(N)}$ vérifiés les estimations en (4.31) avec les fonctions poids :

$$m(x,y,\xi,\eta) = (1+|x_1|^{k_1}+|x_2|^{k_1}+|y|^{k_2}+|\xi_1|^4+|\xi_2|^4+|\eta|^2)^{\frac{m}{2}},$$

$$\phi(x,y,\xi,\eta) = \varphi(x,y,\xi,\eta) = (1+|x_1|^{k_1}+|x_2|^{k_1}+|y|^{k_2}+|\xi_1|^4+|\xi_2|^4+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}},$$

où $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$. On utilise le lemme B.5.1, on trouve que $(A_P+\lambda)^m$ est de classe trace si m vérifie la condition suivante :

$$m > \frac{2k_1+k_2}{M} + 2. \tag{5.25}$$

Donc

$$\begin{aligned} Tr(\widehat{\mathcal{A}}_L+\lambda)^{-m} &\asymp \sum_{j=0}^{N-1}\int_{\mathbb{R}^6} tr(b_{j,\lambda}(x,y,\xi,\eta))dxdyd\xi d\eta + \mathcal{O}(\lambda^{\delta_N}) \\ &\asymp \sum_{j=0}^{N-1} c_{j,m}(\lambda) + \mathcal{O}(\lambda^{\delta_N}) \end{aligned}$$

où δ_N dépend du type de homogénéité $(\underline{M}, \underline{\frac{1}{2}})$

$$c_{j,m}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^6} tr(b_{j,\lambda}(x,y,\xi,\eta))dxdyd\xi d\eta,$$

On calcule le premier terme de la forme asymptotique

$$\begin{aligned} c_{0,m}(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^6} tr(b_{0,\lambda}(x,y,\xi,\eta))dxdyd\xi d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^6} \left(\Re\left((\mu_+ + \lambda)^{-m}\right)\right) dxdyd\xi d\eta. \end{aligned}$$

On fait le changement de variables :

$$\begin{aligned} x &= \lambda^{\frac{k_1}{M}} x' &\Rightarrow \quad dx &= \lambda^{\frac{2k_1}{M}} dx' \\ y &= \lambda^{\frac{k_2}{M}} y' &\Rightarrow \quad dy &= \lambda^{\frac{k_2}{M}} dy' \\ \xi &= \lambda^{\frac{1}{2}} \xi' &\Rightarrow \quad d\xi &= \lambda d\xi' \\ \eta &= \lambda \eta' &\Rightarrow \quad d\eta &= \lambda d\eta' \end{aligned} \tag{5.26}$$

d'où

$$c_{0,m}(\lambda) = \lambda^{\alpha_0} \int_{\mathbb{R}^6} \Re \left((\mu_+(x', y', \xi', \eta') + 1)^{-m} \right) dx'dy'd\xi'd\eta'$$

avec $\alpha_0 = -m + \frac{2k_1+k_2}{M} + 2$, on pose

$$c_0 = \int_{\mathbb{R}^6} \Re \left((\mu_+(x', y', \xi', \eta') + 1)^{-m} \right) dx'dy'd\xi'd\eta',$$

alors pour prouver que $c_0 \neq 0$. On définit $f(\alpha)$, pour $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$f(\alpha) \quad = \quad \int_{\mathbb{R}^6} \left(P(x', y') + 1 + \alpha \sqrt{|\xi'|^2 + |\eta'|^2} \right)^{-m} dx'dy'd\xi'd\eta'$$

et pour $\alpha > 0$, le changement de variables :

$$\xi' = (\frac{1}{\alpha})^{\frac{1}{2}} \xi'' \quad \Rightarrow \quad d\xi' = \frac{1}{\alpha} d\xi''$$

$$\eta' = \frac{1}{\alpha} \eta'' \quad \Rightarrow \quad d\eta' = \frac{1}{\alpha} d\eta''$$

donne

$$f(\alpha) \quad = \quad \frac{1}{\alpha^2} \int_{\mathbb{R}^6} \left(P(x', y') + 1 + \sqrt{|\xi''|^4 + |\eta''|^2} \right)^{-m} dx'dy'd\xi''d\eta''.$$

et par une prolongation analytique pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on peut prendre $\alpha = i$, donc $c_0 = \Re(f(i))$ d'où

$$c_0 \quad = \quad -\int_{\mathbb{R}^6} \left(P(x', y') + 1 + \sqrt{|\xi''|^4 + |\eta''|^2} \right)^{-m} dx'dy'd\xi''d\eta''$$

pour calculer l'intégrale précédente on fait le changement de variables :

$$\xi'' = \quad (1 + P(x', y'))^{\frac{1}{2}} \xi''' \quad \Rightarrow \quad d\xi'' = \quad (1 + P(x', y')) d\xi'''$$

$$\eta'' = \quad (1 + P(x', y')) \eta''' \quad \Rightarrow \quad d\eta'' = \quad (1 + P(x', y')) d\eta'''$$

on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^3} (P(x',y')+1)^{2-m} dx'dy' \int_{\mathbb{R}^3} \left(1+\sqrt{|\xi'''|^4+|\eta'''|^2}\right)^{-m} d\xi''' d\eta''',$$

cette intégrale est positive, d'où $c_0 \neq 0$.

Pour calculer le deuxième terme de $Tr(\widehat{\mathcal{A}}_L - \lambda)^{-m}$ on utilise (5.22) et (5.24), on pose alors

$$\delta_0 = \max\left\{\frac{2k_1+M}{2M}, \frac{k_2+M}{M}\right\},$$

on suppose que

$$\delta_0 = \frac{2k_1+M}{2M},$$

donc on pose

$$\delta_1 = \frac{k_2+M}{M},$$

soient $\delta_0 = \frac{t_0}{s_0}$, $\delta_1 = \frac{t_1}{s_1}$. Le deuxième terme est alors $b_{t_0,\lambda}$ lorsque $l = 0$ et $\alpha_1 + \beta_1 = s_0$, où $\alpha_1 \in \mathbb{N}^2$, $\beta_1 \in \mathbb{N}$. Alors

$$b_{t_0,\lambda}(x,y,\xi,\eta) = \quad -b_{0,\lambda} \sum_\Lambda \Gamma(\alpha_1,\beta_1) \partial_\xi^{\alpha_1} D_x^{\beta_1} (A_L+\lambda)^m \partial_\xi^{\beta_1} D_x^{\alpha_1} b_{0,\lambda}$$

et

$$\Lambda = \{|\alpha_1| = s_0, |\alpha_1+\beta_1| = s_0, |\beta_1| = s_0\}.$$

On fait le changement de variables (5.26) on a

$$c_{t_0,m} = \lambda^{\alpha_1} \int_{\mathbb{R}^6} b'_{t_0}(x',y',\xi',\eta') dx'dy'd\xi'd\eta',$$

où

$$\alpha_1 = -m + \frac{2k_1+k_2}{M} + 2 - t_0 = \alpha_0 - t_0,$$

$b'_{t_0}(x',y',\xi',\eta')$ est le terme obtenu après l'application du changement de variable (5.26) à $b_{t_0,\lambda}(x,y,\xi,\eta)$ et factorisation pour λ^{α_1}. Donc

$$Tr(\hat{\mathcal{A}}_L + \lambda)^{-m} \asymp c_0\lambda^{\alpha_0} + c_1\lambda^{\alpha_1} + \mathcal{O}(\lambda^{\alpha_2}),$$

où m vérifie la condition (5.25) et

$$\alpha_2 \quad \leq \quad \alpha_0 - t_1.$$

□

Preuve de l'existence de valeurs propres pour la famille quadratique $L_P(\lambda)$

On veut maintenant prouver l'existence de valeurs propres pour la famille quadratique $L_P(\lambda)$ dans (5.17).
On prouve le résultat suivant.

Théorème 5.4.2. *L'opérateur L_P dans (5.17) est défini sur $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ ($\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$) avec P est un polynôme positif quasi-homogène d'ordre M et de type (k_1, k_2) et a est un opérateur pseudodifférentiel positif quasi-homogène d'ordre M' et de type (ℓ_1, ℓ_2). S'il existe j, $j \geq 1$ tel que :*

$$n_1\ell_1 + n_2\ell_2 = M'j,$$

où $n_1+n_2 = n$, alors il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ et $u_0 \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, $u_0 \neq 0$ tel que $L_P(\lambda_0)u_0 = 0$.

Preuve :
On associe à $L_P(\lambda)$, l'opérateur matriciel non autoadjoint $\widehat{\mathcal{A}}_L$ dans $D(\widehat{H}_0^{\frac{1}{2}}) \times D(\widehat{H}_0^{\frac{1}{2}})$ tel que

$$\widehat{\mathcal{A}}_L = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{H}_0^{\frac{1}{2}} \\ -\widehat{H}_0^{\frac{1}{2}} & -\widehat{H}_1 \end{pmatrix}, \tag{5.27}$$

où

$$\begin{aligned} \widehat{H}_0 &= a(D_x, D_y) + P^2(x, y), \\ \widehat{H}_1 &= -2P(x, y). \end{aligned} \tag{5.28}$$

Le symbole de $\widehat{\mathcal{A}}_L$ est

$$A_L = \begin{pmatrix} 0 & H_0^{\frac{1}{2}} \\ -H_0^{\frac{1}{2}} & -H_1 \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} H_0 &= a(\xi, \eta) + P^2(x, y), \\ H_1 &= -2P(x, y), \end{aligned}$$

alors le symbole A_L a deux valeurs propres complexes

$$\mu_{\pm} = P(x,y) \pm i\sqrt{a(\xi,\eta)}. \tag{5.29}$$

On trouve la forme asymptotique de $Tr(\widehat{\mathcal{A}}_L+\lambda)^{-m}$ d'ordre λ^γ, pour certain γ et $\lambda \to \infty$, où m est un réel suffisamment grand.

La démonstration s'achève en utilisant la coïncidence des spectres de $L_P(\lambda)$ et $\widehat{\mathcal{A}}_L$ et on utilise le théorème de Lidskii après avoir montré que $Tr(\widehat{\mathcal{A}}_L+\lambda)^{-m} \neq 0$, pour cela on prouve le résultat suivant. □

Proposition 5.4.2. *Pour l'opérateur $\widehat{\mathcal{A}}_L$ dans (5.27) avec $P(x,y)$ un polynôme positif quasi homogène d'ordre M et de type (k_1,k_2) et $a(D_x,D_y)$ un opérateur pseudodifférentiel positif quasi-homogène d'ordre M' et de type (ℓ_1,ℓ_2), où $(x,y) \in \mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$, $n_1+n_2=n$. S'il existe j, $j\geq 1$ tel que*

$$n_1\ell_1 + n_2\ell_2 = M'j\ .$$

Alors pour

$$m > \frac{n_1k_1+n_2k_2}{M} + \frac{2(n_1\ell_1+n_2\ell_2)}{M'}$$

on a

$$Tr(\widehat{\mathcal{A}}_L+\lambda)^{-m} \asymp c_0\lambda^{\alpha_0} + c_{\delta_0'}\lambda^{\alpha_0-\delta_0'} + \mathcal{O}(\lambda^{\alpha_0-\delta_1'}),$$

où

$$c_0 = (-1)^{\frac{\varrho}{2}}\int_{\mathbb{R}^2}(1+P(x,y))^{-m+\varrho}\,dxdy\int_{\mathbb{R}^2}\left(1+\sqrt{a(\xi,\eta)}\right)^{-m}d\xi d\eta,$$

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= -m + \tfrac{k_1n_1+k_2n_2}{M} + \tfrac{2(\ell_1n_1+n_2\ell_2)}{M'}\\
\delta_0 &= \max\left\{\tfrac{M'k_1+2M\ell_1}{MM'}, \tfrac{M'k_2+2M\ell_2}{MM'}\right\},\\
\delta_1 &\leq \max\left\{\left\{\tfrac{M'k_1+2M\ell_1}{MM'}, \tfrac{M'k_2+2M\ell_2}{MM'}\right\}\setminus\delta\right\},\\
\varrho &= \tfrac{2\ell_1n_1}{M'} + \tfrac{2\ell_2n_2}{M'},
\end{aligned}$$

δ_0', δ_1' *sont les numérateurs de* δ_0, δ_1. *De plus* $c_0 \neq 0$.

Preuve :

Le symbole $B_\lambda(x,y,\xi,\eta)$ de la paramétrix $(\widehat{\mathcal{A}}_L+\lambda)^{-m}$ est donné par la forme asymptotique :

$$B_\lambda(x,y,\xi,\eta) \asymp \sum_{j=0}^{N-1} b_{j,\lambda}(x,y,\xi,\eta) + R^{(N)}(x,y,\xi,\eta),$$

où $(x,y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} b_{0,\lambda}(x,y,\xi,\eta) = &\ (A_L(x,y,\xi,\eta)+\lambda)^{-m} \\ \\ b_{j+1,\lambda}(x,y,\xi,\eta) = &\ -b_{0,\lambda}(x,y,\xi,\eta)\textstyle\sum_\Lambda \Gamma(\alpha,\beta) \\ &\ \partial^\alpha_{\xi,\eta}D^\beta_{x,y}(A_L(x,y,\xi,\eta)+\lambda)^m \partial^\beta_{\xi,\eta}D^\alpha_{x,y} b_{l,\lambda}(x,y,\xi,\eta) \end{aligned} \tag{5.30}$$

et

$$\Lambda = \{|(\underline{M}+\underline{M'}).(\alpha+\beta)| + l = j+1, l \leq j\}$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{M} &= (\tfrac{k_1}{M}, \tfrac{k_2}{M}), \\ \\ \underline{M'} &= (\tfrac{2\ell_1}{M'}, \tfrac{2\ell_2}{M'}). \end{aligned}$$

alors

$$|(\underline{M}+\underline{M'}).(\alpha+\beta)| = (\frac{k_1}{M}+\frac{2\ell_1}{M'})(\alpha_1+\beta_1) + (\frac{k_2}{M}+\frac{2\ell_2}{M'})(\alpha_2+\beta_2)$$

de plus les estimations en (4.31) sont vérifiées pour $b_{j,\lambda}$ et $R^{(N)}$ avec les fonction de poids :

$$\begin{aligned} m(x,y,\xi,\eta) &= \left(1+\sum_{i=1}^{n_1}|x_i|^{k_1}+\sum_{i=1}^{n_2}|y_i|^{k_2}+\sum_{i=1}^{n_1}|\xi_i|^{\ell_1}+\sum_{i=1}^{n_2}|\eta_i|^{\ell_2}\right)^{\frac{m}{2}}, \\ \phi(x,y,\xi,\eta)=\varphi(x,y,\xi,\eta) &= \left(1+\sum_{i=1}^{n_1}|x_i|^{k_1}+\sum_{i=1}^{n_2}|y_i|^{k_2}+\sum_{i=1}^{n_1}|\xi_i|^{\ell_1}+\sum_{i=1}^{n_2}|\eta_i|^{\ell_2}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$x = (x_1, \cdots, x_{n_1})$, $y = (y_1, \cdots, y_{n_2})$, $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_{n_1})$, $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_{n_2})$.

On utilise le lemme B.5.1, $(\widehat{\mathcal{A}}_L + \lambda)^{-m}$ est de classe trace lorsque

$$m > \frac{n_1 k_1 + n_2 k_2}{M} + \frac{2(n_1 \ell_1 + n_2 \ell_2)}{M'}. \tag{5.31}$$

Donc

$$\begin{aligned} Tr(\widehat{\mathcal{A}}_L + \lambda)^{-m} &\asymp \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\mathbb{R}^{2n}} tr(b_{j,\lambda}(x, y, \xi, \eta)) dx dy d\xi d\eta + \mathcal{O}(\lambda^{\delta_N}) \\ &\asymp \sum_{j=0}^{N-1} c_{j,m}(\lambda) + \mathcal{O}(\lambda^{\delta_N}) \end{aligned}$$

où

$$c_{j,m}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} tr(b_{j,\lambda}(x, y, \xi, \eta)) dx dy d\xi d\eta.$$

De (5.29) on a

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^{2n}} tr(b_{0,\lambda}(x, y, \xi, \eta)) dx dy d\xi d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \Re\left(\mu_+ + \lambda\right)^{-m} dx dy d\xi d\eta \end{aligned}$$

pour calculer l'intégrale on fait le changement de variables :

$$\begin{array}{rclcrcl} x &=& \lambda^{\frac{k_1}{M}} x' &\Rightarrow& dx &=& \lambda^{\frac{k_1 n_1}{M}} dx', \\ y &=& \lambda^{\frac{k_2}{M}} y' &\Rightarrow& dy &=& \lambda^{\frac{k_2 n_2}{M}} dy', \\ \xi &=& \lambda^{\frac{2\ell_1}{M'}} \xi' &\Rightarrow& d\xi &=& \lambda^{\frac{2\ell_1 n_1}{M'}} d\xi', \\ \eta &=& \lambda^{\frac{2\ell_2}{M'}} \eta' &\Rightarrow& d\eta &=& \lambda^{\frac{2\ell_2 n_2}{M'}} d\eta', \end{array} \tag{5.32}$$

on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^{2n}} tr(b_{0,\lambda}(x, y, \xi, \eta)) dx dy d\xi d\eta \\ &= \lambda^{\alpha_0} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \Re\left(\mu_+(x', y', \xi', \eta') + 1\right)^{-m} dx' dy' d\xi' d\eta' \end{aligned}$$

où

$$\alpha_0 = -m + \frac{k_1 n_1 + k_2 n_2}{M} + \frac{2\ell_1 n_1 + 2\ell_2 n_2}{M'},$$

avec la condition (5.31) sur m. On pose

$$c_0 = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \Re\left(\mu_+(x',y',\xi',\eta')+1\right)^{-m} dx'dy'd\xi'd\eta'$$

i.e.

$$c_{0,m}(\lambda) = \lambda^{\alpha_0} c_0.$$

On prouve que $c_0 \neq 0$. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on définit

$$f(\alpha) \;=\; \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left(P(x',y')+1+\alpha\sqrt{a(\xi',\eta')}\right)^{-m} dx'dy'd\xi'd\eta'$$

pour $\alpha > 0$, on fait le changement de variables :

$$\xi' \;=\; \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{2\ell_1}{M'}} \xi'' \;\Rightarrow\; d\xi' \;=\; \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{2\ell_1 n_1}{M'}} d\xi''$$

$$\eta' \;=\; \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{2\ell_2}{M'}} \eta'' \;\Rightarrow\; d\eta' \;=\; \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{2\ell_2 n_2}{M'}} d\eta''$$

$$f(\alpha) \;=\; \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\varrho} \int_{\mathbb{R}^{4n}} \left(P(x',y')+1+\sqrt{a(\xi'',\eta'')}\right)^{-m} dx'dy'd\xi''d\eta''$$

où $\varrho = \frac{2n_1\ell_1+2n_2\ell_2}{M'}$. Par prolongement analytique de $f(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on peut poser $\alpha = i$. Pour avoir que $\Re(f(i))$ est non nulle il faut avoir une puissance pair de $\frac{1}{i}$ donc s'il existe j, $j \geq 1$ tel que :

$$n_1\ell_1 + n_2\ell_2 = M'j\,, \tag{5.33}$$

ce qui donne que $\Re(f(i))$ est non nulle. Alors on a

$$\Re\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\varrho}\right) \neq 0,$$

lorsque (5.33) est vérifié. Donc

$$\begin{aligned} c_0 &= \Re(f(i)) \\ &= (-1)^{\frac{\varrho}{2}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left(P(x',y')+1+\sqrt{a(\xi'',\eta'')}\right)^{-m} dx'dy'd\xi''d\eta''. \end{aligned}$$

Pour prouver que $c_0 \neq 0$, on commence par faire le changement de variables :

$$\xi'' = \ (1 + P(x', y'))^{\frac{2\ell_1}{M'}} \xi''' \ \Rightarrow \ d\xi'' = \ (1 + P(x', y'))^{\frac{2\ell_1 n_1}{M'}} d\xi'''$$

$$\eta'' = \ (1 + P(x', y'))^{\frac{2\ell_2}{M'}} \eta''' \ \Rightarrow \ d\eta'' = \ (1 + P(x', y'))^{\frac{2\ell_2 n_2}{M'}} d\eta'''$$

on a alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + P(x', y'))^{-m + \frac{2\ell_1 n_1}{M'} + \frac{2\ell_2 n_2}{M'}} dx'dy' \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + \sqrt{a(\xi''', \eta''')}\right)^{-m} d\xi''' d\eta'''.$$

d'où on a $c_0 \neq 0$ car les intégrales précédentes sont positives.

Pour obtenir le deuxième terme de la trace on pose

$$\delta_0 = \max\left\{\frac{k_1}{M} + \frac{2\ell_1}{M'}, \frac{k_2}{M} + \frac{2\ell_2}{M'}\right\},$$

on suppose que

$$\delta_0 = \frac{k_1}{M} + \frac{2\ell_1}{M'},$$

et donc

$$\delta_1 = \frac{k_2}{M} + \frac{2\ell_2}{M'},$$

soit $\delta_0 = \frac{t_0}{s_0}$, $\delta_1 = \frac{t_1}{s_1}$. De (5.30) on déduit que ce terme est $b_{t_0,\lambda}$, alors lorsque $\alpha_1 + \beta_1 = s_0$ on a

$$b_{t_0,\lambda}(x, y, \xi, \eta) = \ -b_{0,\lambda} \sum_{\alpha_1+\beta_1=s_0} \Gamma(\alpha_1, \beta_1) \partial_{\xi_1}^{\alpha_1} D_{x_1}^{\beta_1} (A_P + \lambda)^m \partial_{\xi_1}^{\beta_1} D_{x_1}^{\alpha_1} b_{l,\lambda}$$

On fait le changement de variable (5.32) on a

$$\begin{aligned} c_{1,m}(\lambda) = & \int_{\mathbb{R}^{2n}} tr(b_{t_0,\lambda}(x, y, \xi, \eta)) dx dy d\xi d\eta \\ = & \ \lambda^{\alpha_1} \int_{\mathbb{R}^{2n}} tr(b'_{t_0}(x', y', \xi', \eta')) dx' dy' d\xi' d\eta', \end{aligned}$$

où

$$\alpha_1 = -m + \frac{k_1 n_1 + k_2 n_2}{M} + \frac{n_1 \ell_1 + n_2 \ell_2}{M'} - t_0 = \alpha_0 - t_0,$$

et $b'_{t_0}(x', y', \xi', \eta')$ est obtenu de $b_{t_0,\lambda}(x, y, \xi, \eta)$ après l'application du changement de variable (5.32) et une factorisation par λ. Donc on a

$$Tr(\widehat{\mathcal{A}}_L + \lambda)^{-m} \asymp c_0 \lambda^{\alpha_0} + c_1 \lambda^{\alpha_1}(\lambda) + \mathcal{O}(\lambda^{\alpha_2}),$$

avec $\alpha_2 = \alpha_0 - t_1$. □

6

Calculs des coefficients pour la dimension impaire

Sommaire

L'existence de solutions d'un problème aux valeurs propres non-linéaires a déjà été étudié et résolu pour le cas n pair. Dans ce chapitre nous étudions le cas n impair pour des familles d'opérateurs quadratiques et nous étudions particulièrement les cas $n = 3, 5, 7$.

En suite, nous étudions les familles d'opérateurs quadratiques poly-homogènes et elliptiques.

6.1 Méthode des traces pour des opérateurs homogènes

Dans cette section on étudie la famille quadratique d'opérateurs :

$$L(\lambda) = H_0 + \lambda H_1 + \lambda^2,$$

où H_0, H_1 sont des opérateurs homogènes non bornés dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et qui vérifient les hypothèses (HC), $(HP-1)$, $(HP-2)$, $(HP-3)$, $(HCoer-1)$, $(HCoer-2)$ du chapitre 4.

De plus il existe un cône $\Lambda \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in \Lambda$ avec $|z| > R$, $R > 0$, il existe un réel M et une constante C tels que :

$$\|L^{-1}(z)\| \leq C|z|^{-M} \ , \ \forall\, \Gamma \in \Lambda,$$

où Γ est un rayon du croissance polynomial de L.

Pour la linéarisation du problème on associe à $L(\lambda)$ l'opérateur $\mathcal{A}_L$ tel que

$$\mathcal{A}_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -H_0 & -H_1 \end{pmatrix}.$$

Dans la méthode de Chanillo-Helffer-Laptev, on cherche un nombre entier k pour lequel on a $Tr(\mathcal{A}_L^{-k}) \neq 0$. Lorsque la dimension n, assez grande, k devient très grand et cela nécessite beaucoup de calculs. Afin de réduire les calculs, nous développons une technique basée sur les résultats suivants. Pour les preuves on a besoin de l'intégrale de Cauchy

$$f(\mathcal{A}_L) = \oint_\Lambda f(\tau)(\mathcal{A}_L - \tau)^{-1} d\tau,$$

pour une fonction f holomorphe sur un contour Λ du plan complexe $\mathbb{C}$ (où $\displaystyle\oint_\Lambda F(\tau)d\tau = \frac{1}{2i\pi}\int_\Lambda F(\tau)d\tau$, l'intégration sur un contour dans le plan complexe).

Dans les résultats suivants Ω est simplement le demi plan $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < 0\}$ et Γ est une courbe dans Ω comme sur la figure 6.1.

On commence par donner les propositions suivantes.

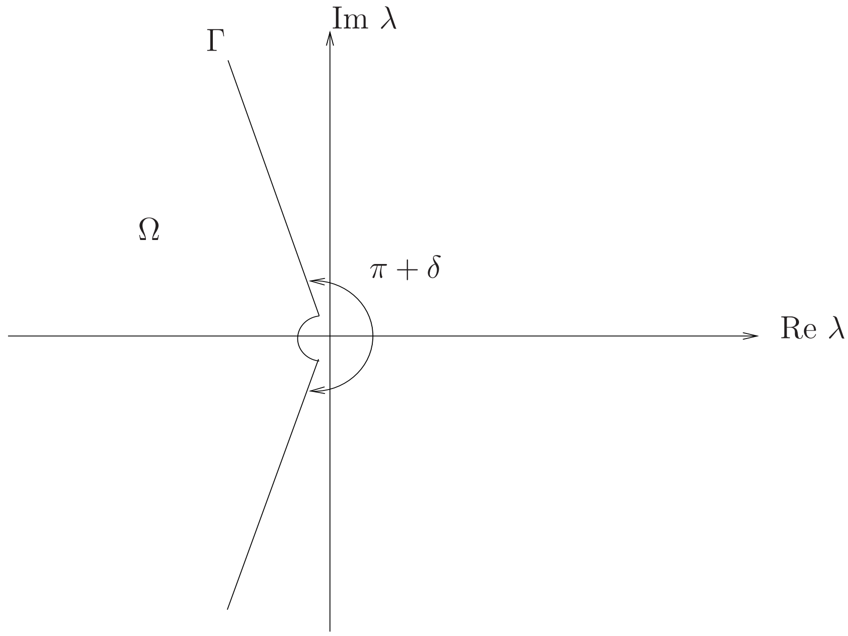

FIG. 6.1 – Le contour Γ

Proposition 6.1.1. *Il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, $k_0 \geq 1$ et un ouvert Ω (c.f. fig.6.1), tels que pour tout $k \geq k_0$, pour tout $\tau \in \Omega$ on a*

$$Tr\left((\mathcal{A}_L - \tau)^{-(k+1)}\right) = -\frac{1}{k!} Tr\left(\frac{d^k}{d\tau^k}\left[L^{-1}(\tau)L'(\tau)\right]\right). \tag{6.1}$$

Preuve :

Pour k assez grand on a $(\mathcal{A}_L - \tau)^{-(k+1)}$ de classe trace pour tout $\tau \in \Omega$. On pose alors k_0 l'entier le plus petit pour lequel $(\mathcal{A}_L - \tau)^{-(k_0+1)}$ est de classe trace. En utilisant le lemme 3.2.2 on obtient

$$Tr\left((\mathcal{A}_L - \tau)^{-(k_0+1)}\right) = -\frac{1}{(k_0)!} Tr\left(\frac{d^{k_0}}{d\tau^{k_0}}(\mathcal{A}_L - \tau)^{-1}\right),$$

car on a

$$Tr\left(\frac{d^{k_0}}{d\tau^{k_0}}(\mathcal{A}_L - \tau)^{-1}\right) = Tr\left(\frac{d^{k_0}}{d\tau^{k_0}}\left[L^{-1}(\tau)L'(\tau)\right]\right),$$

donc on a le résultat. $\square$

Proposition 6.1.2. *On suppose que pour tout* θ, $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $e^{i\theta}$ *est un rayon de croissance minimale. Soit* Γ *un contour dans le plan complexe (c.f. fig.6.1). On suppose que* f *est une fonction holomorphe dans*

$$\{\tau : |\arg(\tau)| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{\tau : |\tau| < r, r > 0\}$$

vérifiant

$$|f(\tau)| \leq C(1 + |\tau|)^{-(k_0+1)}\ , \quad \forall \tau \in \mathbb{C}\ , \ \Re(\tau) < 0, \quad \textit{pour quelque } k_0 \in \mathbb{N}.$$

Alors $f(\mathcal{A}_L)$ *est à trace et*

$$Tr(f(\mathcal{A}_L)) = Tr\left(\oint_\Gamma L^{-1}(\tau)L'(\tau)f(\tau)d\tau\right). \tag{6.2}$$

Preuve :

Les hypothèses de la proposition garantissent l'existence de $L^{-1}(\tau)$ lorsque $\tau \in \Gamma$. Pour une fonction holomorphe f dans $\{\tau : |\arg(\tau)| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{\tau : |\tau| < r, r > 0\}$, on utilise la théorie spectrale et le théorème de Lidskii on a

$$Tr(f(\mathcal{A}_L)) = \sum_{\lambda_j \in \sigma(\mathcal{A}_L)} f(\lambda_j), \tag{6.3}$$

où $\sigma(\mathcal{A}_L)$ est le spectre de $\mathcal{A}_L$.

En utilisant le théorème de Cauchy on a

$$f(\lambda_j) = \oint_\Gamma \frac{f(\tau)}{\tau - \lambda_j} d\tau,$$

en prenant la somme sur tout $\lambda_j \in \sigma(\mathcal{A}_L)$ i.e.

$$\sum_{\lambda_j \in \sigma(\mathcal{A}_L)} f(\lambda_j) = \oint_\Gamma \sum_{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_L)} \frac{f(\tau)}{\tau - \lambda_j} d\tau,$$

parce que on a

$$Tr\left((\mathcal{A}_L - \tau)^{-1}\right) = -\sum_{\lambda_j \in \sigma(\mathcal{A}_L)} \frac{1}{\tau - \lambda_j},$$

en utilisant la proposition 6.1.1 avec $k = 0$ et si $L^{-1}(\tau)L'(\tau)$ est de classe trace on obtient alors

$$Tr\left((\mathcal{A}_L - \tau)^{-1}\right) = -Tr\left(\left[L^{-1}(\tau)L'(\tau)\right]\right),$$

donc on a

$$Tr(f(\mathcal{A}_L)) = Tr\left(\oint_\Gamma \left[L^{-1}(\tau)L'(\tau)\right] f(\tau)d\tau\right).$$

Maintenant, lorsque $\dfrac{d^k}{d\tau^k}\left[L^{-1}(\tau)L'(\tau)\right]$ est de classe trace pour $k \geq 1$, on pose

$$f(\tau) = F^{(k)}(\tau), \tag{6.4}$$

où $F^{(k)}$ est la k-ième primitive de f, en utilisant alors l'intégrale de Cauchy on a

$$f(\lambda_j) = F^{(k)}(\lambda_j) = \frac{k!}{2i\pi}\oint_\Gamma \frac{F(\tau)}{(\tau-\lambda_j)^{k+1}}d\tau,$$

en prenant la somme sur tout $\lambda_j \in \sigma(\mathcal{A}_L)$, on obtient

$$Tr\left((\mathcal{A}_L-\tau)^{-(k+1)}\right) = -\sum_{\lambda_j\in\sigma(\mathcal{A}_L)} \frac{1}{(\tau-\lambda_j)^{k+1}},$$

grâce à la proposition 6.1.1 on a

$$\sum_{\lambda_j\in\sigma(\mathcal{A}_L)} \frac{1}{(\tau-\lambda_j)^{k+1}} = \frac{k!}{2i\pi}Tr\left(\frac{d^k}{d\tau^k}\left[L^{-1}(\tau)L'(\tau)\right]\right),$$

d'où

$$\sum_{\lambda_j\in\sigma(\mathcal{A}_L)} f(\lambda_j) = Tr\left(\frac{k!}{2i\pi}\oint_\Gamma F(\tau)\frac{d^k}{d\tau^k}\left[L^{-1}(\tau)L'(\tau)\right]\right),$$

en faisant k intégrations par partie i.e.

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_j f(\lambda_j) &= Tr\left(\oint_\Gamma \frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\left[L^{-1}(\tau)L'(\tau)\right]F'(\tau)d\tau\right), \\
&= Tr\left(\oint_\Gamma \frac{d^{k-2}}{d\tau^{k-2}}\left[L^{-1}(\tau)L'(\tau)\right]F''(\tau)d\tau\right), \\
&\vdots \\
&= Tr\left(\oint_\Gamma L^{-1}(\tau)L'(\tau)F^{(k)}(\tau)d\tau\right),
\end{aligned}$$

en utilisant (6.3) et (6.4) on obtient (6.2). □

Proposition 6.1.3. *S'il existe une fonction holomorphe dans*

$$\{\tau : |\arg(\tau)| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{\tau : |\tau| < r, r > 0\},$$

vérifiant

$$|f(z)| \leq C(1 + |z|)^{-(k_0+1)}\ , \quad \forall z \in \mathbb{C}\ , \quad \Re(z) < 0, \tag{6.5}$$

telle que :

$$Tr\left(\oint_{\Gamma} L^{-1}(\tau)L'(\tau)f(\tau)d\tau\right) \neq 0, \tag{6.6}$$

où Γ est le même contour de la proposition précédente. Alors L a au moins une valeur propre non nulle.

Preuve :

Le spectre de L coïncide avec le spectre de $\mathcal{A}$, alors en utilisant le théorème de Lidskii

$$Tr(f(\mathcal{A})) = \sum_{\lambda \in \sigma(L)} f(\lambda),$$

où $\sigma(L)$ est le spectre de L. Alors en utilisant la proposition (6.1.2) la démonstration est achevée. $\square$

Notre technique est basée sur la condition (6.6).

On considère maintenant la famille quadratique :

$$L_P(\lambda) = -\Delta + (P(x) - \lambda),$$

avec P un polynôme elliptique et homogène de degré $M \geq 2$.

Notre objectif est de prouver la conjecture suivante.

Conjecture 6.1.1. *Pour toute dimension n, pour tout $M \geq 2$ on a*

$$\sigma(L_P) \neq \emptyset.$$

$\sigma(L_P)$ désigne le spectre de L_P.

On prouve le résultat suivant pour des familles d'opérateurs homogènes lorsque

$n = 1$, $n = 3$.

Théorème 6.1.1. *Pour les dimensions* $n = 1, 3$, *pour tout* $M \geq 2$ *on a*

$$\sigma(L_P) \neq \emptyset.$$

Pour $n = 5$, $n = 7$, on donne des cas particuliers où cette conjecture est vérifiée (voir l'étude en préparation [1]).
On transforme le problème de L_P, en un problème avec petit paramètre semi-classique $\hbar > 0$. Comme on l'a vu dans la section précédente, on fait le changement de variables $x = \gamma^{\frac{1}{M}} y$ et on pose $\hbar = \gamma^{-\frac{M+1}{M}}$, $\mu = \frac{\lambda}{\gamma}$.
On obtient alors que $L_P(\lambda)$ est unitairement équivalent à

$$\widehat{L}_\hbar(\mu) = -\hbar^2\Delta + (P(y) - \mu)^2.$$

On cherche une paramétrix pour $\widehat{L}_h$. Le symbole, $B(x, \xi, \tau)$, de $\widehat{L}_h^{-1}$ admet la forme asymptotique :

$$B(\tau, x, \xi) \asymp \sum_{0 \leq j \leq N} B_{2j}(\tau, x, \xi)\hbar^{2j} + \hbar^{2N+2} R^{(2N)}(\tau, x, \xi) \tag{6.7}$$

avec

$$\begin{aligned} B_0(\tau, x, \xi) &= \frac{1}{L(\tau, x, \xi)}, \\ B_{2j}(\tau, x, \xi) &= -B_0(\tau, x, \xi) \textstyle\sum_\Lambda \Gamma(\alpha, \beta)\partial_\xi^\alpha D_x^\beta L(\tau, x, \xi)\partial_\xi^\beta D_x^\alpha B_l(\tau, x, \xi), \end{aligned} \tag{6.8}$$

et

$$\Lambda = \Big\{|\alpha + \beta| = 2(j - l)\,,\ \ 0 \leq l \leq j - 1\Big\},$$

$$\Gamma(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2(j-l)} \frac{(-1)^{j-l+|\beta|}}{\alpha!\beta!}.$$

de plus il existe des fonction poids m, ϕ, φ, pour tous multi-indices $(\alpha, \beta) \in$

$\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, il existe des constantes $C_0(\alpha,\beta)$, $C_j(\alpha,\beta)$, $C^{(N)}(\alpha,\beta)$ avec

$$\begin{aligned}
\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta B_0(\tau,x,\xi)\right| &\leq C_0(\alpha,\beta)\frac{1}{m(x,\xi)+|\tau|^2}\phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|},\\
\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta B_j(\tau,x,\xi)\right| &\leq C_j(\alpha,\beta)\frac{1}{m(x,\xi)+|\tau|^2}\phi^{-|\alpha|-j}\varphi^{-|\beta|-j},\\
\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta R^{(N)}(\tau,x,\xi)\right| &\leq C^{(N)}(\alpha,\beta)(\phi\varphi)^{-N-|\alpha|-|\beta|}\frac{m(x,\xi)+|\tau|\sqrt{m(x,\xi)}}{m(x,\xi)+|\tau|^2},
\end{aligned} \tag{6.9}$$

pour tout $\tau \in \Lambda$, pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. Comme on a vu dans le chapitre 4 on peut prendre

$$\begin{aligned}
m(x,\xi) &= (|\xi|^2+|x|^{2M}+1)^{\frac{1}{2}}\\
\phi(x,\xi)=\varphi(x,\xi) &= (|\xi|^2+|x|^{2M}+1)^{\frac{1}{2M}}
\end{aligned}$$

On trouve alors le résultat suivant.

Proposition 6.1.4. *Le $\hbar$-symbole de Weyl de l'opérateur $\widehat{L}_\hbar^{-1}(\tau)$ est :*

$$B_\hbar(\tau) = \frac{1}{L(\tau,x,\xi)} + \hbar^2\left(\frac{L_2(\tau,x,\xi)}{L^3(\tau,x,\xi)} + \frac{L_3(\tau,x,\xi)}{L^4(\tau,x,\xi)}\right) + \hbar^4 R^{(4)}(\tau,x,\xi),$$

où $R^{(4)}(\tau,x,\xi)$ vérifie l'estimation d'erreur dans (6.9) et

$$\begin{aligned}
L(\tau,x,\xi) &= |\xi|^2 + (P(x)-\tau)^2,\\
L_2(\tau,x,\xi) &= (P(x)-\tau)\Delta P(x) + |\nabla P(x)|^2,\\
L_3(\tau,x,\xi) &= -2\Big((P(x)-\tau)D^2P(x)\xi.\xi + (\nabla P(x).\xi)^2 + (P(x)-\tau)^2.|\nabla P(x)|^2\Big),
\end{aligned}$$

où $D^2P(x)$ désigne, la dérivée seconde de $P(x)$, la matrice Hessienne,

$$\begin{aligned}
\Delta P(x) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x_j^2},\\
\nabla P(x) &= (\frac{\partial P(x)}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial P(x)}{\partial x_n}),
\end{aligned}$$

le point "." désigne le produit scalaire.

Pour pouvoir appliquer notre technique en utilisant la condition (6.6), il faut calculer la composition de $\widehat{L}_\hbar^{-1}(\tau)$ et $\widehat{L}'(\tau)$. Le lemme suivant nous évite ce calcul en utilisant la trace qui donne le produit de symboles au lieu de la composition.

Lemme 6.1.1. *Soient $\widehat{S}$, $\widehat{T}$ deux opérateurs h-pseudodifférentiel vérifiant des hypothèses de chapitre 4. Les symboles de $\widehat{S}$, $\widehat{T}$ sont $S(x,\xi)$, $T(x,\xi)$, respectivement. Alors*

$$Tr(\widehat{S}\widehat{T}) = \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbb{R}^{2n}} S(x,\xi)T(x,\xi)dxd\xi. \tag{6.10}$$

Pour simplifier on pose

$$L_{f,\hbar}(\widehat{L}_\hbar^{-1}\widehat{L}') = \oint_\Gamma \widehat{L}_\hbar^{-1}(\tau)\widehat{L}'(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Donc on peut prouver le résultat suivant.

Lemme 6.1.2. *Soient f, Γ définis comme dans la proposition 6.1.2. Alors*

$$Tr\left(L_{f,\hbar}(\widehat{L}_\hbar^{-1}\widehat{L}')\right) = \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{j=0}^{N}\left(\oint_\Gamma B_{2j}(\tau,x,\xi)L'(\tau,x,\xi)f(\tau)d\tau\right)\hbar^{2j-n}+\mathcal{O}(\hbar^{2N+2-n}),$$

où $B_{2j}(\tau,x,\xi)$, $j\geq 0$ sont les coefficients du symbole de $\widehat{L}_\hbar^{-1}(\tau)$.

Preuve :

Pour trouver la forme asymptotique du symbole de $\widehat{L}_\hbar^{-1}\widehat{L}'$ on utilise la forme asymptotique (6.7) de la paramétrix de $\widehat{L}(\tau)$ et on utilise le lemme 6.1.1 on obtient :

$$B(\tau,x,\xi)L'(\tau,x,\xi) \asymp \sum_{j=0}^{N} B_{2j}(\tau,x,\xi)L'(\tau,x,\xi)\hbar^{2j} + \hbar^{2N+2}R_{BL'}{}^{(2N)}(\tau).$$

où B_{2j} vérifié les estimations (6.9), et pour tous multi-indices (α,β), il existe des constantes $C_{L'}(\alpha,\beta)$, $C_{BL'}^{(N)}(\alpha,\beta)$ telles que :

$$\left|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta L'(\tau,x,\xi)\right| \;\leq\; C_{L'}(\alpha,\beta)\sqrt{m(x,\xi)}\phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|},$$

$$\left|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta R_{BL'}{}^{(2N)}(\tau,x,\xi)\right| \;\leq\; C_{BL'}^{(N)}(\alpha,\beta)\phi^{-N-|\alpha|}\varphi^{-N-|\beta|}\frac{\sqrt{m(x,\xi)}(\sqrt{m(x,\xi)}+|\tau|)^2}{m(x,\xi)+|\tau|^2},$$

pour des fonctions poids m, ϕ, φ, pour tout $(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}$, $\tau\in\Gamma$. Donc

$$Tr\left(L_{f,\hbar}(\widehat{L}_\hbar^{-1}\widehat{L}')\right) \;=\; \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int_{R^{2n}}\oint_\Gamma B(\tau,x,\xi)L'(\tau,x,\xi)f(\tau)d\tau dxd\xi$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\sum_{j=0}^{N}\left(\int_{R^{2n}}\oint_{\Gamma} B_{2j}(\tau,x,\xi)L'(\tau,x,\xi)f(\tau)d\tau\right)h^{2j}dxd\xi+\mathcal{O}(h^{2N+2-n})$$

d'où le résultat. $\square$

Le résultat suivant entraîne la preuve du théorème 6.1.1 en utilisant le théorème de Lidskii et la coïncidence de spectres de $L(\lambda)$ et $\mathcal{A}_L$.

Théorème 6.1.2. *Sous les hypothèses de la proposition 6.1.2 sur f, on a*

$$\sum_{\lambda\in\sigma(\widehat{L}_\hbar)} f(\lambda)=\sum_{j\geq 0} C_{2j}(f)\hbar^{2j-n}+\mathcal{O}(\hbar^{\infty})\ ,\quad h\to 0, \tag{6.11}$$

où les C_{2j} sont des coefficients complexes qui ont la forme suivante :

$$C_{2j}(f)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^{2n}}\oint_{\Gamma} b_{2j,\tau}(x,\xi)L'(x,\xi,\tau)f(\tau)d\tau dxd\xi \tag{6.12}$$

où $b_{2j,\tau}(x,\xi)$, $j\geq 0$, sont les termes du symbole de $\widehat{L}_\hbar^{-1}(\tau)$. De plus on a

i) si n est pair, alors $C_0(f)\neq 0$ avec

$$C_0(f)=\frac{2}{(-1)^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^{2n}} f(P(x)+|\eta|)dxd\eta.$$

ii) si n est impair, alors $C_0(f)=0$.

iii) si $n=1,3$, alors $C_2(f)\neq 0$ tel que pour $n=1$ on a

$$C_2(f)=-\frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}} f^{(3)}(P)(P'(x))^2dx,$$

et pour $n=3$ on a

$$C_2(f)=-\frac{1}{48\pi}\int_{R^3} f'(P)|\nabla P(x)|^2dx.$$

iv) si n est impair avec $n\geq 5$, alors $C_2(f)=0$.

6.1.1 Preuve (i) et (ii)

L'existence du développement asymptotique pour $Tr(f(\widehat{\mathcal{A}}_L))$ avec $C_j(f)$ de la forme (6.33), résulte directement de la proposition 6.1.1 et du lemme 6.1.2.
On commence par calculer $C_0(f)$ qui a la forme suivante :

$$\begin{aligned} C_0(f) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^{2n}} \oint_\Gamma b_{0,\tau}(x,\xi) L'(x,\xi,\tau) f(\tau) d\tau dx d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^{2n}} \oint_\Gamma \frac{L'(x,\xi,\tau)}{L(x,\xi,\tau)} f(\tau) d\tau dx d\xi \end{aligned}$$

la fonction $\dfrac{1}{L(x,\xi,\tau)}$ a deux pôles lorsque $\tau_\mp = P(x) \mp i|\xi|$, en appliquant alors le théorème des résidus on a

$$\begin{aligned} C_0(f) &= -\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^{2n}} \left(\frac{P(x)-\tau_+}{\tau_+ - \tau_-} f(\tau_+) + \frac{P(x)-\tau_-}{\tau_- - \tau_+} f(\tau_-) \right) dx d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^{2n}} \left(f(\tau_+) + f(\tau_-) \right) dx d\xi. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Pour calculer l'intégrale à droite on pose

$$f(\alpha) = \int_{R^{2n}} f(P(x) + \alpha|\xi|) dx d\xi$$

holomorphe dans

$$\{\alpha \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > -\delta, \delta > 0\}.$$

Pour α réel et $\alpha > 0$, avec le changement de variable $\eta = \alpha\xi$ on obtient

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha^n} \int_{R^{2n}} f(P(x) + |\eta|) dx d\eta,$$

par prolongement analytique on a

$$\int_{R^{2n}} f(P(x) + i|\xi|) dx d\xi = \frac{1}{i^n} \int_{R^{2n}} f(P(x) + |\eta|) dx d\eta.$$

Il résulte alors que :

$$C_0(f) = \frac{2}{(-1)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^{2n}} f(P(x) + |\eta|) dx d\eta,$$

si n est pair, ce qui prouve (i).

si n est impair on aura

$$f(i) = \frac{1}{i^n} \int_{R^{2n}} f(P(x) + |\eta|) dx d\eta,$$

$$f(-i) = -\frac{1}{i^n} \int_{R^{2n}} f(P(x) + |\eta|) dx d\eta,$$

de (6.13) on obtient

$$C_0(f) = 0,$$

ce qui prouve (ii).

6.1.2 Preuve (iii)

Pour (iii) on a besoin de calculer $C_2(f)$ qui a la forme suivante :

$$C_2(f; x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^{2n}} \oint_{\Gamma} b_{2,\tau}(x, \xi) L'(x, \xi, \tau) f(\tau) d\tau dx d\xi$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^{2n}} \oint_{\Gamma} \left(\frac{L_2(x, \xi, \tau) L'(x, \xi, \tau)}{L^3(x, \xi, \tau)} + \frac{L_3(x, \xi, \tau) L'(x, \xi, \tau)}{L^4(x, \xi, \tau)} \right) f(\tau) d\tau dx d\xi.$$

L_2, L_2 ont les formes données dans la proposition 6.1.4.

Pour τ réel, $\tau < 0$ on fait le changement de variable :

$$\xi = (P(x) - \tau)\eta,$$

alors on obtient

$$
\begin{aligned}
C_2(f) \quad = \quad & \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}\oint_\Gamma \Bigg(\left(\frac{-2\Delta P(x)}{(P(x)-\tau)^{4-n}}\right)\left(\int_{R^n}\frac{1}{(\eta^2+1)^3}d\eta\right) \\
& + \left(\frac{-2|\nabla P(x)|^2}{(P(x)-\tau)^{5-n}}\right)\left(\int_{R^n}\frac{1}{(\eta^2+1)^3}d\eta\right) \\
& + \left(\frac{4\Delta P(x)}{(P(x)-\tau)^{4-n}}\right)\left(\int_{R^n}\frac{\eta_1^2}{(\eta^2+1)^4}d\eta\right) \\
& + \left(\frac{4|\nabla P(x)|^2}{(P(x)-\tau)^{5-n}}\right)\left(\int_{R^n}\frac{\eta_1^2}{(\eta^2+1)^4}d\eta\right) \\
& + \left(\frac{4|\nabla P(x)|^2}{(P(x)-\tau)^{5-n}}\right)\left(\int_{R^n}\frac{1}{(\eta^2+1)^4}d\eta\right)\Bigg) f(\tau)d\tau dx.
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

Pour $n = 1$

On commence par le cas $n = 1$.

On calcule les intégrales en τ le long de Γ en appliquant le théorème des résidus.

On pose

$$C_2(f) = C_2^{(1)}(f) + C_2^{(2)}(f),$$

avec

$$
\begin{aligned}
C_2^{(1)}(f) &= \left(b_3^{(1)} - 2b_{4,1}^{(1)}\right)\int_{\mathbb{R}} \Delta P(x) f''(P(x))dx \\
C_2^{(2)}(f) &= \left(-\frac{1}{3}b_3^{(1)} + \frac{2}{3}b_{4,1}^{(1)} + \frac{2}{3}b_4^{(1)}\right)\int_{\mathbb{R}} |\nabla P(x)|^2 f^{(3)}(P(x))dx,
\end{aligned}
$$

où (c.f. l'annexe C) :

$$b_{j,k,\ell}^{(1)} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\eta^{2k}\eta^{2\ell}}{(\eta^2+1)^j}d\eta.$$

Pour calculer $b_3^{(1)}$, $b_4^{(1)}$, $b_{4,1}^{(1)}$ on utilise l'annexe C on obtient alors

$$
\begin{aligned}
b_3^{(1)} &= \frac{3\pi}{8}, \\
b_4 &= \frac{5\pi}{16},
\end{aligned}
$$

et

$$\begin{aligned} b_{4,1}^{(1)} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\eta^2}{(\eta^2+1)^4} d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(\eta^2+1)^3} d\eta - \int_{\mathbb{R}} \frac{\eta^2}{(\eta^2+1)^4} d\eta \\ &= b_3^{(1)} - b_4^{(1)}, \\ &= \qquad \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

L'intégration par parties donne

$$\int_{\mathbb{R}} f''(P(x))P''(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} f^{(3)}(P(x))(P'(x))^2 dx$$

d'où on a

$$\begin{aligned} C_2(f) &= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{4}{3}b_3 + \frac{8}{3}b_{4,1} + \frac{2}{3}b_4\right)\int_{\mathbb{R}} f^{(3)}(P)(P'(x))^2 dx \\ &= -\left(\frac{1}{16}\right)\int_{\mathbb{R}} f^{(3)}(P)(P'(x))^2 dx, \end{aligned}$$

Si on choisit par exemple

$$f(\tau) = (\tau + z)^{-k}\ , \quad avec\ k \geq 1$$

on a alors

$$C_2(f) \neq 0.$$

Pour $n = 3$

Pour terminer la preuve de (iii), on traite le cas $n = 3$.

On reprend le calcul de $C_2(f)$ comme précédemment i.e.

$$\begin{aligned} C_2^1(f) &= \left(b_3^{(3)} - 2b_{4,1}^{(3)}\right)\int_{\mathbb{R}^3} \Delta P(x) f(P(x))dx \\ C_2^2(f) &= \left(-\frac{1}{3}b_3^{(3)} + \frac{2}{3}b_{4,1}^{(3)} + \frac{2}{3}b_4^{(3)}\right)\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla P(x)|^2 f'(P(x))dx, \end{aligned}$$

En intégrant par partie on obtient

$$\int_{R^3} f(P(x))D^2P(x)\eta.\eta dx + \int_{\mathbb{R}^3} f'(P(x))(\nabla P(x).\eta)^2 dx = 0$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(P(x))\Delta P(x)dx + \int_{\mathbb{R}^3} f'(P(x))|\nabla P(x)|^2 dx = 0$$

d'où on a

$$\begin{aligned} C_2(f) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \left(-4b_3^{(3)} + 8b_{4,1}^{(3)} + 4b_4^{(3)}\right) \int_{\mathbb{R}^3} f'(P)|\nabla P(x)|^2 dx \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \left(\frac{17\pi^2}{16}\right) \int_{\mathbb{R}^3} f'(P)|\nabla P(x)|^2 dx \\ &= -\frac{1}{48\pi} \int_{\mathbb{R}^3} f'(P)|\nabla P(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} b_3^{(3)} &= \frac{\pi^2}{4}, \\ b_4^{(3)} &= \frac{7\pi^2}{8}, \\ b_{4,1}^{(3)} &= \frac{\pi^2}{24}. \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve de (iii). □

6.1.3 Preuve de (iv)

On obtient la preuve de (iv) en utilisant la forme (6.14) de $C_2(f)$, car pour $n \geq 5$, les termes sont analytiques en τ.

6.2 $n = 5$ et $n = 7$

Pour la preuve de (iv), en utilisant 6.14 on calcule $C_2(f)$ pour le cas $n = 5$ et $n = 7$. Grâce au théorème de Cauchy on obtient

$$\begin{aligned} C_2^1(f) &= \left(b_3^{(5)} - 2b_{4,1}^{(5)}\right) \int_{\mathbb{R}^5} \oint_\Gamma \Delta P(x)(P(x)-\tau)f(\tau)d\tau dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2^2(f) &= \left(-\frac{1}{3}b_3^{(5)} + \frac{2}{3}b_{4,1}^{(5)} + \frac{2}{3}b_4^{(5)}\right) \int_{\mathbb{R}^5} \oint_\Gamma |\nabla P(x)|^2 f(\tau)d\tau dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

car $f(\tau)$ et $(P(x)-\tau)f(\tau)$ sont analytiques pour tout $\tau \in \Gamma$.

De même, pour $n = 7$. Ce qui achève la démonstration du théorème 6.1.2. $\square$

D'après le théorème 6.1.2 on doit calculer alors $C_4(f)$, pour les dimensions $n = 5$, $n = 7$.

Calculs de $C_4^{(n)}(f)$, $n = 5, 7$

Pour calculer $C_4^{(n)}(f)$ qui a la forme

$$C_4^{(n)}(f) = \frac{1}{2i\pi}\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \oint_\Gamma B_4(\tau, x, \xi)(-2(P(x)-\tau))f(\tau)d\tau dx d\xi,$$

d'après la formule de récurrence dans (6.8), $B_4(\tau, x, \xi)$ a la forme suivante :

$$\begin{aligned} B_4(\tau, x, \xi) = -B_0(\tau, x, \xi)\Big\{ &\sum_{|\beta|=4} \Gamma(0,\beta)\partial_x^\beta L(\tau, x, \xi)\partial_\xi^\beta B_0(\tau, x, \xi) \\ &+ \sum_{|\alpha|=2} \Gamma(\alpha, 0)\partial_\xi^\alpha L(\tau, x, \xi)\partial_x^\alpha B_2(\tau, x, \xi) \\ &+ \sum_{|\beta|=4} \Gamma(0,\beta)\partial_\xi^\beta L(\tau, x, \xi)\partial_x^\beta B_2(\tau, x, \xi)\Big\}, \end{aligned}$$

où les autres termes de la formule de récurrence dans (6.8) s'annulent lorsque $j = 2$ et $|\alpha + \beta| = 4 - 2l$ avec

i) $|\alpha| = 4$ et $l = 0$ car $\partial_\xi^\alpha L(\tau, x, \xi) = 0$ lorsque $|\alpha| \geq 3$,

ii) $|\alpha| \neq 0$ et $|\beta| \neq 0$, $0 \leq l \leq 4$ car $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta L(\tau, x, \xi) = 0$.

Donc

$$C_4^{(n)}(f; x) = C_4^1(f; x) + C_4^2(f; x) + C_4^3(f; x), \quad pour \;\; n = 5, 7,$$

avec

$$C_4^1(f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \oint_\Gamma \sum_{|\beta|=4} \Gamma(0,\beta) \partial_x^\beta L(\tau, x, \xi) I_\beta^{(1)}(-2(P(x) - \tau)) f(\tau) d\tau dx,$$

$$C_4^2(f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \oint_\Gamma \sum_{|\alpha|=2} \Gamma(\alpha, 0) I_\alpha^{(2)}(-2(P(x) - \tau)) f(\tau) d\tau dx,$$

$$C_4^3(f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \oint_\Gamma \sum_{|\beta|=4} \Gamma(0,\beta) \partial_\xi^\beta L(\tau, x, \xi) I_\beta^{(3)}(-2(P(x) - \tau)) f(\tau) d\tau dx,$$

où

$$I_\beta^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|\xi|^2 + (P(x) - \tau)^2} \right) \partial_\xi^\beta \left(\frac{1}{|\xi|^2 + (P(x) - \tau)^2} \right) d\xi, \quad |\beta| = 4,$$

$$I_\alpha^{(2)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|\xi|^2 + (P(x) - \tau)^2} \right) \left(\partial_\xi^\alpha |\xi|^2 \right) \left(\partial_x^\alpha B_2(\tau, x, \xi) \right) d\xi, \quad |\alpha| = 2,$$

$$I_\beta^{(3)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|\xi|^2 + (P(x) - \tau)^2} \right) \left(\partial_\xi^\beta B_2(\tau, x, \xi) \right) d\xi, \qquad |\beta| = 2.$$

Pour calculer $I_\beta^{(1)}$, $I_\alpha^{(2)}$, $I_\beta^{(3)}$, on commence par faire le changement de variable pour $\tau < 0$:

$$\xi = (P(x) - \tau)\eta,$$

donc

$$I_\beta^{(1)} = a(\beta) \frac{1}{(P(x) - \tau)^3},$$

où

$$a(\beta) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1 + |\eta|^2} \partial_\eta^\beta \left(\frac{1}{1 + |\eta|^2} \right) d\eta.$$

Pour calculer l'intégrale par rapport à η, on commence par calculer les dérivés

$$\partial_\eta^\beta \left(\frac{1}{1 + |\eta|^2} \right)$$

où $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ avec seulement deux cas possibles pour avoir $a(\beta) \neq 0$, le cas $|\beta| = |\beta_j| = 4$ et le cas $|\beta| = |\beta_j| + |\beta_k| = 4$ avec $|\beta_j| = |\beta_k| = 2$ donc on a

$$\begin{aligned}\partial_\eta^\beta\left(\frac{1}{1+|\eta|^2}\right) &= \sum_{1\leq j\leq 5}\frac{24}{(1+|\eta|^2)^3} - \frac{288\eta_j^2}{(1+|\eta|^2)^4} + \frac{4!(2\eta_j)^4}{(1+|\eta|^2)^5} \\ &\quad + \sum_{\substack{1\leq j,k\leq 5\\ j\neq k}}\frac{8}{(1+|\eta|^2)^3} - \frac{48((\eta_j)^2+(\eta_k)^2)}{(1+|\eta|^2)^4} + \frac{4!(2)^4\eta_j^2\eta_k^2}{(1+|\eta|^2)^5}.\end{aligned}$$

Pour calculer $a(\beta)$ il faut calculer alors les intégrales $b_{j,k,0}^{(n)}$, pour $j = 4, 5, 6$, $k = 1, 2$, donc

$$a(\beta) = \left\{\begin{array}{ll} a_1 & \text{si } |\beta| = |\beta_j| = 4 \\ a_2 & \text{si } |\beta| = |\beta_j| + |\beta_k| = 4,\ |\beta_j| = |\beta_k| = 2 \end{array}\right\}$$

où

$$a_1 = \tfrac{1}{96}b_4^{(n)} - \tfrac{1}{12}b_{5,1}^{(n)} + \tfrac{1}{6}b_{6,2}^{(n)},$$

$$a_1 = b_{6,1,1}^{(n)}.$$

D'où on a

$$\begin{aligned}C_4^{(1)}(f;x) &= 2\oint_\Gamma (P(x)-\tau)\sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^4(P(x)-\tau)^2\frac{a_1}{(P(x)-\tau)^{8-n}}f(\tau)d\tau \\ &\quad + \oint_\Gamma (P(x)-\tau)\sum_{j\neq k}\partial_{x_k}^2\partial_{x_j}^2(P(x)-\tau)^2\frac{a_2}{(P(x)-\tau)^{8-n}}f(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Donc pour $n = 5$ on a

$$C_4^1(f;x) = C_4^{(1,1)}(f;x) + C_4^{(1,2)}(f;x),$$

avec

$$C_4^{1,1}(f) = \Big(-20a_1\sum_{j=1}^5(\partial_{x_j}^4P(x)) - 20a_2\sum_{j\neq k}(\partial_{x_j}^2\partial_{x_k}^2P(x))\Big)f(P(x)),$$

$$C_4^{1,2}(f) = \Big(12a_1\sum_{j=1}^5(\partial_{x_j}^2P(x))^2 + 4a_2\sum_{j\neq k}(\partial_{x_j}^2P(x))(\partial_{x_k}^2P(x))\Big)f'(P(x)).$$

Pour $n = 7$, grâce au théorème de Cauchy on a

$$C_4^1(f) = 0.$$

Pour $C_4^2(f;x)$, pour simplifier les calculs on préfère effectuer une intégration par partie en x pour éviter de calculer $\partial_x^\alpha B_2$ qui demande beaucoup de calculs. Pour avoir l'intégrabilité en x, il faut intégrer en τ sur Γ, mais l'intégrale est semi-convergente d'où on peut pas changer les ordres d'intégrations. Pour cela on introduit une troncature $\chi(\epsilon x)$ en x, avec $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi(0) = 1$, telle que :

$$C_4^2(f;x) = 2 \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}_x^n} \oint_\Gamma \left(\int_{\mathbb{R}_\xi^n} \chi(\epsilon x) \partial_x^\alpha B_2(\tau;x,\xi) \frac{L'(\tau;x,\xi)}{L(\tau;x,\xi)} d\xi \right) f(\tau) d\tau dx,$$

l'intégration par partie $|\alpha|$ fois donne

$$\begin{aligned} C_4^2(f;x) &= 2 \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}_x^n} \oint_\Gamma \left(\int_{\mathbb{R}_\xi^n} \partial_x^\alpha \left(\chi(\epsilon x) \frac{L'(\tau;x,\xi)}{L(\tau;x,\xi)} \right) B_2(\tau;x,\xi) d\xi \right) f(\tau) d\tau dx, \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}_x^n} \oint_\Gamma \left(\int_{\mathbb{R}_\xi^n} \partial_x^\alpha \left(\frac{L'(\tau;x,\xi)}{L(\tau;x,\xi)} \right) B_2(\tau;x,\xi) d\xi \right) f(\tau) d\tau dx. \end{aligned}$$

Pour $n = 5$, on obtient

$$C_4^2(f;x) = C_4^{2,1}(f;x) + C_4^{2,2}(f;x) + C_4^{2,3}(f;x).$$

avec

$$\begin{aligned} C_4^{2,1}(f;x) &= \left(\tfrac{1}{2} b_4^{(5)} - b_{5,1}^{(5)} - b_5^{(5)} + 2 b_{6,1}^{(5)} \right) (\Delta P(x))^2, \\ C_4^{2,2}(f;x) &= \left(-\tfrac{1}{4} b_4^{(5)} + \tfrac{1}{2} b_{5,1}^{(5)} + \tfrac{5}{2} b_5^{(5)} - 4 b_{6,1}^{(5)} - 6 b_6^{(5)} + 4 b_{7,1}^{(5)} \right) \left(\Delta P(x) |\nabla P(x)|^2 \right), \\ C_4^{2,3}(f;x) &= \left(-\tfrac{1}{2} b_5^{(5)} + b_{6,1}^{(5)} + \tfrac{5}{3} b_6^{(5)} - \tfrac{4}{3} b_{7,1}^{(5)} - \tfrac{4}{3} b_7^{(5)} \right) \left(|\nabla P(x)|^4 \right). \end{aligned}$$

Pour $n = 7$, on a

$$C_4^2(f;x) = C_4^{2,1}(f;x) + C_4^{2,2}(f;x).$$

avec

$$C_4^{2,1}(f;x) = \left(-\frac{1}{2}b_4^{(7)} + b_{5,1}^{(7)} + 5b_5^{(7)} - 8b_{6,1}^{(7)} - 8b_6^{(7)} + 8b_{7,1}^{(7)}\right)(\Delta P(x)|\nabla P(x)|^2),$$

$$C_4^{2,2}(f;x) = \left(-3b_5^{(7)} + 6b_{6,1}^{(7)} + 10b_6^{(7)} - 8b_{7,1}^{(7)} - 8b_7^{(7)}\right)(|\nabla P(x)|^4).$$

Pour $C_4^3(f;x)$, on suit la méthode précédente en définissant une fonction troncature pour pouvoir appliquer l'intégration par partie en ξ pour éviter de dériver $B_2(\tau;x,\xi)$, d'où on obtient

$$C_4^3(f;x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\oint_\Gamma\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{|\beta|=4}\Gamma(0,\beta)\partial_\xi^\beta L(\tau,x,\xi)$$
$$(-2(P(x)-\tau))\left(\partial_\xi^\beta\frac{1}{|\xi|^2+(P(x)-\tau)^2}\right)(B_2(\tau,x,\xi))\,d\xi f(\tau)d\tau dx.$$

Pour $n=5$ on a

$$C_4^3(f;x) = C_4^{3,1}(f;x) + C_4^{3,2}(f;x) + C_4^{3,3}(f;x),$$

avec

$$C_4^{3,1}(f;x) = \Bigg(\left(-b_5^{(5)} + 6b_{6,1}^{(5)}\right)(\Delta P(x))^2 - 8b_{7,2}\textstyle\sum_{j=1}^5(\partial_{x_j}^2 P(x))^2$$
$$-8b_{7,1,1}\sum_{j\neq k}(\partial_{x_j}^2 P(x))(\partial_{x_k}^2 P(x)) - 16b_{7,1,1}\sum_{j\neq k}(\partial_{x_j}\partial_{x_k}P(x))^2\Bigg)f'(P(x))$$

$$C_4^{3,2}(f;x) = \Bigg(\left(b_5^{(5)} - 12b_{6,1}^{(5)} - 6b_6^{(5)} + 8b_{7,1}^{(5)}\right)(|\nabla P(x)|^2\Delta P(x)).$$
$$+8b_{7,2}\textstyle\sum_{j=1}^5(\partial_{x_j}P(x))^2(\partial_{x_j}^2 P(x)) + 8b_{7,1,1}\sum_{j\neq k}(\partial_{x_j}P(x))^2(\partial_{x_k}^2 P(x))$$
$$+16b_{7,1,1}\sum_{j\neq k}(\partial_{x_j}P(x))(\partial_{x_k}P(x))(\partial_{x_j}\partial_{x_k}P(x))\Bigg)f''(P(x))$$

$$C_4^{3,3}(f;x) = \Bigg(\left(-\frac{1}{6}b_5^{(5)} + b_{6,1}^{(5)} + \frac{1}{3}b_6^{(5)} - \frac{4}{3}b_{7,1}^{(5)}\right)(|\nabla P(x)|^4).$$
$$-4b_{7,2}\textstyle\sum_{j=1}^5(\partial_{x_j}P(x))^4 - 4b_{7,1,1}\sum_{j\neq k}(\partial_{x_j}P(x))^2(\partial_{x_k}P(x))^2\Bigg)f^{(3)}(P(x))$$

Pour $n = 7$ on a

$$C_4^3(f;x) = C_4^{3,1}(f;x) + C_4^{3,2}(f;x) + C_4^{3,3}(f;x),$$

avec

$$C_4^{3,1}(f;x) \quad = \quad 0,$$

$$\begin{aligned} C_4^{3,2}(f;x) \quad = \quad & \Big(\Big(2b_5^{(5)} - 12b_{6,1}^{(7)} - 2b_6^{(5)} + 8b_{7,1}^{(7)}\Big) \left(|\nabla P(x)|^2 \Delta P(x)\right). \\ & +16b_{7,2} \textstyle\sum_{j=1}^7 (\partial_{x_j} P(x))^2 (\partial_{x_j}^2 P(x)) + 16b_{7,1,1} \sum_{j\neq k} (\partial_{x_j} P(x))^2 (\partial_{x_k}^2 P(x)) \\ & +32b_{7,1,1} \sum_{j\neq k} (\partial_{x_j} P(x))(\partial_{x_k} P(x))(\partial_{x_j}\partial_{x_k} P(x))\Big) f(P(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_4^{3,3}(f;x) \quad = \quad & \Big(\Big(-b_5^{(7)} + 6b_{6,1}^{(5)} + 2b_6^{(5)} - 8b_{7,1}^{(5)}\Big) \left(|\nabla P(x)|^4\right). \\ & -8b_{7,2} \textstyle\sum_{j=1}^5 (\partial_{x_j} P(x))^4 - 24b_{7,1,1} \sum_{j\neq k} (\partial_{x_j} P(x))^2 (\partial_{x_k} P(x))^2 \Big) f'(P(x)). \end{aligned}$$

On pose :

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \tfrac{1}{6}b_{6,2} - \tfrac{1}{12}b_{5,1} + \tfrac{1}{96}b_4 \\
a_2 &= b_{6,1,1} \\
e_1 &= \tfrac{1}{2}b_4 - b_{5,1} - b_5 + 2b_{6,1} \\
e_2 &= -\tfrac{1}{2}b_4 + b_{5,1} + 5b_5 - 8b_{6,1} - 8b_6 + 8b_{7,1} \\
e_3 &= -3b_5 + 6b_{6,1} + 10b_6 - 8b_{7,1} - 8b_7 \\
g_1 &= -b_5 + 6b_{6,1} \\
g_2 &= 2b_5 - 24b_{6,1} - 2b_6 + 16b_{7,1} \\
g_3 &= -b_5 + 6b_{6,1} + 2b_6 - 8b_{7,1}.
\end{aligned}
$$

Donc pour $n = 5$ on a

$$
\begin{aligned}
C_4(f;x) &= C_4^1(f;x) + C_4^2(f;x) + C_4^3(f;x) \\
&= A_0(x)f(P(x)) + A_1(x)f'(P(x)) + A_2(x)f''(P(x)) + A_3(x)f^{(3)}(P(x)),
\end{aligned}
$$

où le coefficient $A_0(x)$ a la forme :

$$
A_0(x) = -20a_1 \sum_{j=1}^{5} (\partial_{x_j}^4 P(x)) - 20a_2 \sum_{j \neq k} (\partial_{x_j}^2 \partial_{x_k}^2 P(x)),
$$

le coefficient $A_1(x)$ a la forme :

$$\begin{aligned} A_1(x) &= 12a_1 \sum_{j=1}^{5} (\partial^2_{x_j} P(x))^2 + 4a_2 \sum_{j \neq k} (\partial^2_{x_j} P(x))(\partial^2_{x_k} P(x)), \\ &+ (e_1 + g_1)(\Delta P(x))^2 - 8b_{7,2} \sum_{j=1}^{5} (\partial^2_{x_j} P(x))^2 \\ &- 8b_{7,1,1} \sum_{j \neq k} (\partial^2_{x_j} P(x))(\partial^2_{x_k} P(x)) \\ &- 16b_{7,1,1} \sum_{j \neq k} (\partial_{x_j} \partial_{x_k} P(x))^2 \end{aligned}$$

le coefficient $A_2(x)$ a la forme :

$$\begin{aligned} A_2(x) &= \frac{(e_2 + g_2)}{2} (\Delta P(x)) |\nabla P(x)|^2 + 8b_{7,2} \sum_{j=1}^{5} (\partial_{x_j} P(x))^2 (\partial^2_{x_j} P(x)) \\ &+ 8b_{7,1,1} \sum_{j \neq k} (\partial_{x_j} P(x))^2 (\partial^2_{x_k} P(x)) \\ &+ 16b_{7,1,1} \sum_{j \neq k} (\partial_{x_j} P(x))(\partial_{x_k} P(x))(\partial_{x_j} \partial_{x_k} P(x)) \end{aligned}$$

le coefficient $A_3(x)$ a la forme :

$$\begin{aligned} A_3(x) &= \frac{(e_3 + g_3)}{6} |\nabla P(x)|^4 - \frac{4}{3} b_{7,2} \sum_{j=1}^{5} (\partial_{x_j} P(x))^4 \\ &- 4b_{7,1,1} \sum_{j \neq k} (\partial_{x_j} P(x))^2 (\partial_{x_k} P(x))^2. \end{aligned}$$

en utilisant l'annexe C, on obtient

$$\begin{aligned}
A_0(x) &= \frac{\pi^3}{24}\sum_j(\partial^4_{x_j}P) - \frac{\pi^3}{48}\sum_{j\neq k}(\partial^2_{x_j}\partial^2_{x_k}P),\\
A_1(x) &= -\frac{11\pi^3}{480}\sum_j(\partial^2_{x_j}P)^2 + \frac{\pi^2}{480}\sum_{j\neq k}(\partial_{x_j}\partial_{x_k}P)^2\\
&\quad -\frac{\pi^3}{160}(\Delta P)^2 - \frac{\pi^2}{240}\sum_{j\neq k}(\partial^2_{x_j}P)(\partial^2_{x_k}P)^2\\
A_2(x) &= \frac{\pi^3}{96}|\nabla P|^2\Delta P + \frac{\pi^3}{160}\sum_j(\partial^2_{x_j}P)(\partial_{x_j}P)^2\\
&\quad -\frac{\pi^2}{480}\sum_{j\neq k}(\partial^2_{x_j}P(x))(\partial_{x_k}P)^2 + \frac{\pi^2}{240}\sum_{j\neq k}(\partial_{x_j}\partial_{x_k}P)(\partial_{x_j}P)(\partial_{x_k}P)\\
A_3(x) &= -\frac{\pi^3}{576}|\nabla P|^4 - \frac{\pi^3}{960}\sum_j(\partial_{x_j}P)^4 - \frac{\pi^3}{960}\sum_{j\neq k}(\partial_{x_j}P)^2(\partial_{x_k}P)^2
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Et pour $n = 7$ on a

$$\begin{aligned}
C_4(f;x) &= C_4^1(f;x) + C_4^2(f;x) + C_4^3(f;x)\\
&= A_0(x)f(P(x)) + A_1(x)f'(P(x)),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
A_0(x) &= (e_2+g_2)(\Delta P(x))|\nabla P(x)|^2 + 16b_{7,2}\sum_{j=1}^{7}(\partial_{x_j}P(x))^2(\partial^2_{x_j}P(x)) \\
&\quad +16b_{7,1,1}\sum_{j\neq k}(\partial_{x_j}P(x))^2(\partial^2_{x_k}P(x)) \\
&\quad +32b_{7,1,1}\sum_{j\neq k}(\partial_{x_j}P(x))(\partial_{x_k}P(x))(\partial_{x_j}\partial_{x_k}P(x)) \\
A_1(x) &= (e_3+g_3)|\nabla P(x)|^4 - 8b_{7,2}\sum_{j=1}^{7}(\partial_{x_j}P(x))^4 \\
&\quad -24b_{7,1,1}\sum_{j\neq k}(\partial_{x_j}P(x))^2(\partial_{x_k}P(x))^2.
\end{aligned}$$

de même, en utilisant l'annexe C, on a

$$\begin{aligned}
A_0(x) &= \frac{\pi^4}{120}\sum_j(\partial^2_{x_j}P)(\partial_{x_j}P)^2 + \frac{\pi^3}{360}\sum_{j\neq k}(\partial^2_{x_j}P(x))(\partial_{x_k}P)^2 \\
&\quad +\frac{\pi^3}{180}\sum_{j\neq k}(\partial_{x_j}\partial_{x_k}P)(\partial_{x_j}P)(\partial_{x_k}P) \qquad (6.16) \\
A_1(x) &= -\frac{\pi^4}{240}|\nabla P|^4 - \frac{\pi^4}{240}\sum_j(\partial_{x_j}P)^4 - \frac{\pi^3}{240}\sum_{j\neq k}(\partial_{x_j}P)^2(\partial_{x_k}P)^2.
\end{aligned}$$

Ces calculs ramènent à donner la conjecture suivante.

Conjecture 6.2.1. *Pour* $f(\tau) = (\tau+t)^{-k}$, $k > \frac{n(m+1)}{m}$ *et* $t > 0$, *on a*

$$C_4^{(n)}(f) \neq 0\ , \quad \textit{pour } n = 5, 7,$$

avec

$$C_4^{(n)}(f) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} C_4(f;x)dx.$$

Cette propriété est vérifiée pour le polynôme $|x|^2$. Parmi les cas particuliers pour lesquels cette propriété est vérifiée, on a les polynômes avec les conditions suivantes :

– $P(x) = \sum_{1\leq j\leq n} \alpha_j x_j^m$, $\alpha_j > 0$, $n = 5, 7$.

– $P(x) = \sum_{1\leq j,k\leq n} \alpha_{j,k} x_j x_j$, est une forme définie positive pour $n = 5, 7$.

– Pour $n = 7$ et P un polynôme convexe.

– Pour $n = 5$ et P un polynôme convexe qui vérifie de plus les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{1\leq j,k\leq 5} \partial_j^2 \partial_k^2 P &\leq 2 \sum_{1\leq j\leq 5} \partial_j^4 P, \\ \sum_{\substack{j\neq k \\ 1\leq j,k\leq 5}} \left(\partial_{j,k}^2 P\right)^2 &\leq 11\pi \sum_{1\leq j\leq 5} \left(\partial_j^2 P\right)^2, \end{aligned} \tag{6.17}$$

on déduit la première inégalité de la forme de $A_0(x)$ dans (6.15), et la deuxième de la forme de $A_1(x)$ dans (6.15).

Exemple 6.2.1. *Pour $n = 7$ cette propriété est vérifiée pour les polynômes convexe de la forme*

$$P(x) = (\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^2)^{m/2},$$

pour $m = 2, 4, 6$, $\alpha_j > 0$.

Dans l'appendice D on donne des résultats numériques pour le calcul de $C_4^{(n)}(f)$ pour des polynômes elliptiques non convexes pour $n = 5, 7$.

6.3 Annulation des coefficients en grande dimension

Dans ce paragraphe on cherche la dimension n impaire et j pour lesquels les coefficients $C_{2j}^{(n)}(f)$ dans la formule de la trace (6.11) s'anulles.
On traite la relation (6.8), donc par récurrence en j, on obtient

$$K_{2j}(z;x,\xi) = \sum_{j+1\leq k\leq 3j} \frac{Q_k^{2j}(x,P-z,\xi)}{L(z;x,\xi)^{k+1}} \tag{6.18}$$

où $Q_k^{2j}(x,P-z,\xi)$ est un polynôme dans $((P-z),\xi)$, de degré total inférieur ou égale à $k-2$, avec des coefficients dépendent des dérivés de $P(x)$.
On désigne par $\mathrm{val}[Q_k^{2j}]$, la valuation de Q_k^{2j} comme polynôme en $P-z,\xi$. On donne maintenant la définition de la valuation.

Définition 6.3.1. *On désigne par $\mathcal{I}$ l'idéal engendré par $\xi_1,\cdots,\xi_d, P-z$, dans l'anneau $C^\infty(\mathbb{R}_\xi\times\mathbb{R}_x)$. Si $Q\in C^\infty(\mathbb{R}_\xi\times\mathbb{R}_x)$, val$[Q]$ est l'entier le plus grand p tel que $Q\in\mathcal{I}^p$.*

Lemme 6.3.1. *On a*

$$\mathrm{val}[Q_k^{2j}] \geq 2(k-1-2j), \ \text{ for } \ 2j+2\leq k\leq 3j, \ \text{and} \ \ j\geq 1.$$

Preuve :

On raisonne par récurrence en j, en utilisant (6.8) et la formule suivante pour Q et L appartiennent à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, avec multi-indice $\alpha\in\mathbb{N}^n$, tels que :

$$\partial^\alpha\left(\frac{Q}{L^{k+1}}\right) = \sum C(\mu_j,\gamma_k)\frac{\partial^{\alpha-\gamma}Q(\partial^{\gamma_1}L)^{\mu_1}\cdots(\partial^{\gamma_\ell}L)^{\mu_\ell}}{L^{\mu+k+1}} \tag{6.19}$$

on somme pour tout $\gamma_j\in\mathbb{N}^n$, $\mu_j\in\mathbb{N}$, $\gamma\leq\alpha$, $\mu_1+\cdots\mu_\ell=\mu$, $\mu_1|\gamma_1|+\cdots+\mu_\ell|\gamma_\ell| = |\gamma|$. $\square$

Le résultat suivant donne pour quels n, j on a $C_{2j}^{(n)}(f)=0$.

Théorème 6.3.1. *Pour une fonction f définie comme ci-dessus, pour tout $n \geq 1$. Les coefficients du développement (6.11) possèdent les propriétés suivantes :*
Si n est impair,

$$C_0^{(n)}(f) = 0 \tag{6.20}$$

et si n est pair,

$$C_0^{(n)}(f) = 2(-1)^{n/2}(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(P(x) + |\eta|)dxd\eta. \tag{6.21}$$

Pour les termes avec $j \geq 1$, on a le résultat suivant :

$$C_{2j}^{(d)}(f) = \sum_{0 \leq k \leq n_j} \int_{\mathbb{R}^n} A_{2j,k}(x) f^{(k)}(P(x))dx, \tag{6.22}$$

où $A_{2j,k}(x)$ sont des polynômes dans $\partial_x^\gamma P(x)$, $|\gamma| \leq 2j$ et n_j dépend de j. De plus, si n est impair, alors $C_{2j}^{(n)}(f) = 0$ pour $n \geq 4j + 1$.

Preuve :

On commence par calculer $C_0^{(n)}(f)$. On a l'intégrale suivante :

$$C_0^{(n)}(f) = -\int_{\mathbb{R}^{2n}} \oint_\Gamma \frac{2(P(x) - z)}{|\xi|^2 + (P(x) - z)^2} f(z)dzd\xi\tilde{d}x,$$

où $\tilde{d}x = (2\pi)^{-n}dx$. Grâce au théorème des résidus on obtient

$$C_0^{(n)}(f) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} [f(P(x) + i|\xi|) + f(P(x) - i|\xi|)]d\xi\tilde{d}x$$

Pour $a > 0$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (f(P(x) + a|\xi|)d\xi\tilde{d}x = a^{-n} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (f(P(x) + |\xi|)d\xi\tilde{d}x$$

Par un prolongement analytique on peut poser $a = i$ d'où on a la formule (6.20) et (6.21). Pour n pair, il existe une fonction f, qui vérifie (6.5) telle que :

$$C_0^{(n)}(f) \neq 0.$$

Pour $j \geq 1$, en utilisant (6.18), on a

$$C_{2j}^{(n)}(f) = \iint \oint_\Gamma \sum_{j+1 \leq k \leq 3j} \frac{2(P(x) - z)Q_k^{2j}(x, P(x) - z, \xi)}{L(z; x, \xi)^{k+1}} f(z)dzd\xi\tilde{d}x \tag{6.23}$$

Maintenant, on prouve le résultat suivant :

$$C_{2j}^{(n)}(f) = 0\,, \quad pour\ 4j+1 \leq n.$$

Pour cela on introduit l'intégrale suivante, pour $u > 0, v > 0$,

$$J_{k,\nu}f(u,v) = \oint_\Gamma \frac{(v-z)^\nu}{(u+(v-z)^2)^{k+1}} f(z)dz, \tag{6.24}$$

de plus, on a

$$J_{k,\nu}f(u,v) = \frac{(-1)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial u^k} J_{0,\nu}f(u,v). \tag{6.25}$$

Pour $k = 0$ on a

$$\begin{aligned}
J_{0,\nu}f(u,v) &= \oint_\Gamma \frac{(v-z)^\nu}{(u+(v-z)^2)} f(z)dz \\
&= \oint_\Gamma \frac{(v-z)^\nu}{(z-(v+i\sqrt{u}))(z-(v-i\sqrt{u}))} f(z)dz \\
&= \oint_{\Gamma_{v+i\sqrt{u}}} \frac{g_1(z)}{(z-(v+i\sqrt{u}))}dz + \oint_{\Gamma_{v-i\sqrt{u}}} \frac{g_2(z)}{(z-(v-i\sqrt{u}))}dz,
\end{aligned}$$

où $\Gamma_{v+i\sqrt{u}}$, $\Gamma_{v-i\sqrt{u}}$ sont les contours autour de $v+i\sqrt{u}$, $v-i\sqrt{u}$ respectivement, et

$$\begin{aligned}
g_1(z) &= \frac{(v-z)^\nu f(z)}{(v-i\sqrt{u})}, \\
g_2(z) &= \frac{(v-z)^\nu f(z)}{(v+i\sqrt{u})}.
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème des résidus, on a

$$J_{0,\nu}f(u,v) = g_1(v+i\sqrt{u}) + g_2(v-i\sqrt{u}).$$

i.e.

$$J_{0,\nu}f(u,v) = \frac{1}{2i^{1-\nu}}\Big((-1)^\nu u^{(\nu-1)/2} f(v+i\sqrt{u}) - u^{(\nu-1)/2} f(v-i\sqrt{u})\Big). \tag{6.26}$$

Pour prouver que $C_{2j}^{(n)}(f) = 0$ lorsque $n \geq 4j+1$, on va prouver que les termes de la somme dans (6.23) s'annulent après intégration par rapport z et ξ.

On suppose $j+1 \leq k \leq 2j+1$. Parce que on a

$$Q_k^{2j}(x, P(x)-z, \xi) = \sum_{\nu,\gamma} R_{\nu,\gamma}(x)(P(x)-z)^\nu \xi^\gamma,$$

donc on obtient que l'intégrale suivante

$$I_{P,Q_k^{2j}}(f) = \int \oint_\Gamma \frac{2(P(x)-z)Q_k^{2j}(x, P(x)-z, \xi)}{L(z;x,\xi)^{k+1}} f(z) dz d\xi$$

est une somme des intégrales des formes suivantes :

$$I_\nu^k(f)(x,\xi) = \oint_\Gamma \frac{(P(x)-z)^\nu}{L(z;x,\xi)^{k+1}} f(z) dz$$

Une intégration par partie en z donne la formule suivante :

$$I_{\nu+1}^k(f)(x,\xi) = \frac{\nu}{2k} I_{\nu-1}^{k-1}(f) - \frac{1}{2k} I_\nu^{k-1}(f') \tag{6.27}$$

On peut poser $\nu = 0$. De plus on a

$$I_0^{k-1}(g)(x,\xi) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial u^{k-1}} J_{0,\nu} g(u, P(x))|_{u=|\xi|^2}.$$

En utilisant la formule (6.26), parce que $f(v \pm i\sqrt{u})$ est d'ordre $\sqrt{u}$, donc :

$$u^{(\nu-1)/2} f(v \pm i\sqrt{u})$$

est d'ordre $u^{\nu/2}$, d'où $\frac{\partial^{k-1}}{\partial u^{k-1}}\Big(u^{(\nu-1)/2} f(v \pm i\sqrt{u})\Big)$ est d'ordre $u^{\nu/2-(k-1)}$, et on posant $u = |\xi|^2$ et $\nu = 0$ on obtient

$$I_0^{k-1}(g)(x,\xi) = \mathcal{O}(|\xi|^{-(2-2k)}),$$

proche de $\xi = 0$. On note que pour $k \leq 2j+1$ et $d \geq 4j+1$ on a $k < \frac{d}{2} + 1$, par conséquent on a $\xi \mapsto I_0^\ell(g)(x,\xi)$ est intégrable en utilisant la technique de prolongement analytique utilisé pour $j = 0$, on obtient $I_0^{k-1}(g)(x,\xi) = 0$, donc

$$\int \oint_\Gamma \frac{2(P(x)-z)Q_k^{2j}(x, P(x)-z, \xi)}{L(z;x,\xi)^{k+1}} f(z) dz d\xi = 0$$

On suppose maintenant $2j+2 \leq k \leq 3j$. En utilisant le lemme (6.3.1) on a

$$Q_k^{2j}(x, P(x)-z, \xi) = \sum_{\nu+|\gamma| \geq 2(2k-1-2j)} R_{\nu,\gamma}(x)(P(x)-z)^\nu \xi^\gamma.$$

De même que précédemment, on a

$$I_{P,Q_k^{2j}}(f) = \sum_{\nu+|\gamma|\geq 2(2k-1-2j)} R_{\nu,\gamma}(x) \int \oint_\Gamma \frac{2(P(x)-z)^{\nu+1}\xi^\gamma}{L(z;x,\xi)^{k+1}} f(z)dzd\xi,$$

en utilisant (6.26) on arrive à poser $\nu = 0$ pour l'intégrale par rapport à z. Puisque les conditions $2j+2 \leq k \leq 3j$, $d \geq 4j+1$ implique que $k < \frac{d}{2}+1$, d'où on obtient que $\xi \mapsto I_0^\ell(g)(x,\xi)$ est intégrable, et la démonstration est achevée en utilisant la technique de prolongement analytique. □

6.3.1 Conjecture

Ce que on a prouvé pour le cas $n = 1, 3$, suggère d'énoncer la conjecture suivante :

Conjecture 6.3.1. *Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$, il existe f vérifie (6.1.2) tel que :*

$$C_{2j}^{(4j-1)}(f) \neq 0, \quad \text{et} \quad C_{2j}^{(4j-3)}(f) \neq 0. \tag{6.28}$$

On a vérifié cette conjecture pour $n = 1$ et $n = 3$ ainsi que pour des familles de polynômes pour $n = 5$ et $n = 7$. Dans la section précédente on a calculé $C_4^{(5)}(f)$ et $C_4^{(7)}(f)$, ces deux coefficients ont demandé beaucoup de calculs et contiennent beaucoup termes. Des calculs numériques peuvent donner des indications sur le résultat mais pour des cas particuliers des polynômes non convexes.
La preuve de cette conjecture montrerait naturellement la conjecture (6.1.1) (i.e. $\sigma(L_P) \neq$ pour toute dimension n et pour tout polynôme P elliptique de degré supérieur ou égale à 2)

Dans le chapitre suivant on va montrer que la propriété $C_{2j}^{(d)}(f) \neq 0$ donne une estimation de densité de valeurs propres.

6.4 Polynômes elliptiques

On peut appliquer les résultats précédents pour des polynômes, $P(x)$, poly-homogènes (c.f. 4.1.1) et elliptiques i.e.

$$P(x) = P_m(x) + P_{m-1}(x) + \cdots P_1(x) + P_0(x), \tag{6.29}$$

où P_j est homogène de degré j et

$$P_m(x) > 0\ , \quad pour\ x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}.$$

On a

$$P(\zeta^{\frac{1}{m}} y) = \zeta P^{(\varepsilon)}(y)$$

avec $\varepsilon = \zeta^{-\frac{1}{m}} = \hbar^{\frac{1}{m+1}}$ et :

$$P^{(\varepsilon)}(y) = P_m(y) + \varepsilon P_{m-1}(y) + \cdots + \varepsilon^m P_0(y). \tag{6.30}$$

Donc $P^{(\varepsilon)}$ est une famille polynomiale elliptique. De plus, on a que la formule dans (6.9) est uniforme dans le petit paramètre ε, i.e. pour tout $0 < \varepsilon < 1$, il existe une constante $C > 0$, qui dépend pas de ε, il existe $R > 0$, tels que

$$|P^{(\varepsilon)}(y)| \geq C|y|^m,$$

pour tout $|y| \geq R$. Pour des familles polynomiales d'opérateurs $L(\lambda)$, avec

$$L(\lambda) = -\Delta + (P(x) - \lambda)^2,$$

où P est un polynôme quasi elliptique (c.f. défenition 4.1.3). On considère la famille d'opérateurs semi-classiques $\widehat{L_\hbar}$, $\hbar \searrow 0$, du symbole suivant :

$$L(\tau; x, \xi) = \sum_{0 \leq j \leq 2m} L_j(\tau, x, \xi) \hbar^{\frac{j}{m+1}},$$

où

$$\begin{aligned}
L_0(\tau,x,\xi) &= -\Delta+(P_m(x)-\tau)^2,\\
L_j(\tau,x,\xi)\Big|_{j=1}^{m-1} &= 2(P_m(x)-\tau)P_{m-j}(x)+\sum_{\substack{0\le s\le m-1\\ j=2s}}(P_{m-s}(x))^2+\sum_{\substack{0\le s,t\le m-1\\ j=s+t}}(P_{m-s}(x))^2\\
L_j(\tau,x,\xi)\Big|_{j=m}^{2m} &= \sum_{\substack{0\le s\le m-1\\ j=2s}}(P_{m-s}(x))^2+\sum_{\substack{0\le s,t\le m-1\\ j=s+t}}(P_{m-s}(x))^2,
\end{aligned}$$

pour tout $\tau\in\Lambda$, pour tout $(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}$. On trouve la paramétrix de $\widehat{L}_\hbar$.

Le symbole, $B_P(x,\xi,\tau)$, de $\widehat{L}_\hbar^{-1}$ admet la forme asymptotique suivante (avec le polynôme $P=P_m+P_{m-1}+\cdots P_1+P_0$) :

$$B_P(x,\xi,\tau)\asymp\sum_{0\le j\le N}B_{2j}(\tau,x,\xi)h^{2j}+h^{2N+2}R^{(2N)}(\tau,x,\xi)$$

avec

$$\begin{aligned}
B_0(\tau,x,\xi) &= \frac{1}{L_0(\tau,x,\xi)},\\
B_{2j}(\tau,x,\xi) &= -B_0(\tau,x,\xi)\sum_{\Lambda}\Gamma(\alpha,\beta)\partial_\xi^\alpha D_x^\beta L_k(\tau,x,\xi)\partial_\xi^\beta D_x^\alpha B_l(\tau,x,\xi),
\end{aligned}\tag{6.31}$$

et

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \Big\{|\alpha+\beta|=2(j-l-k)\,,\ \ 0\le l+k\le j-1\Big\},\\
\Gamma(\alpha,\beta) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2(j-l-k)}\frac{(-1)^{j-l-k+|\beta|}}{\alpha!\beta!}.
\end{aligned}$$

De plus, $B_j(\tau,x,\xi)$, $R^{(2N)}(\tau,x,\xi)$ vérifient les estimations dans (6.9).

De même que précédemment, pour f une fonction holomorphe vérifiant les hypothèses de la proposition 6.1.2, on désigne par $C_{2j}(f,P)$ les coefficients de $C_{2j}(f)$ avec le polynôme $P=P_m+P_{m-1}+\cdots P_1+P_0$. On a

$$\sum_{\lambda\in\sigma(\widehat{L}_\hbar)}f(\lambda)=\sum_{j=0}^{N}C_{2j}(f,P)\hbar^{2j-n}+\mathcal{O}(\hbar^N)\ ,\quad \hbar\searrow 0,\tag{6.32}$$

où les C_{2j} sont les coefficients suivants :

$$C_{2j}(f,P) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^{2n}}\oint_{\Gamma} B_{2j,\tau}(x,\xi)L'(x,\xi,\tau)f(\tau)d\tau dx d\xi \tag{6.33}$$

où $B_{2j,\tau}(x,\xi)$, $j \geq 0$, sont les termes du symbole de $\widehat{L}_h^{-1}(\tau)$ donné dans la forme (6.31).

On prouve le résultat suivant.

Théorème 6.4.1. *Pour une fonction f définit comme ci-dessus, pour tout $n \geq 1$. Pour la régime semi-classique dans (6.32).*

Si n est pair, alors on a

$$\sum_{\lambda\in\sigma(\widehat{L}_\hbar)} f(\lambda) \;=\; \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N'} \hbar^{2j-n+\frac{k}{(m+1)}}\gamma_{k,j} + \mathcal{O}(\hbar^N) \tag{6.34}$$

où

$$\gamma_{0,0} \;=\; C_0^{(n)}(f,P_m)$$

$$\gamma_{k,j} \;=\; \tfrac{d^k}{d\varepsilon^k}C_{2j}^{(n)}\left(f,P^{(\varepsilon)}\right)\Big|_{\varepsilon=0}$$

et

$$C_0^{(n)}(f,P_m) = 2(-1)^{n/2}(2\pi)^{-n}\iint_{\mathbb{R}^{2n}} f(P_m(x)+|\eta|)dx d\eta. \tag{6.35}$$

De plus, si n est impair, alors $C_{2j}^{(n)}(f,P^\varepsilon) = 0$ pour $n \geq 4j+1$, et pour $n = 4j_0-3$ ou $n = 4j_0-1$, $j_0 \geq 1$ on a

$$\sum_{\lambda\in\sigma(\widehat{L}_\hbar)} f(\lambda) \;=\; \sum_{j=j_0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N'} \hbar^{2j-n+\frac{k}{(m+1)}}\gamma_{k,j} + \mathcal{O}(\hbar^N) \tag{6.36}$$

où

$$\gamma_{0,j_0} \;=\; C_{2j_0}^{(n)}(f,P_m)$$

où $C_2^{(n)}(f,P_m) \neq 0$, pour $n = 1,3$.

Preuve :

On utilise donc la série de Taylor en ε, avec $\varepsilon = \hbar^{1/(m+1)}$, on a

$$C_{2j}^{(n)}(f,P^{(\varepsilon)}) = \sum_{i=0}^{N'-1}\frac{\varepsilon^i}{i!}\left(\frac{d^i}{d\varepsilon^i}C_{2j}^{(n)}\left(f,P^{(0)}\right)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N'}), \tag{6.37}$$

pour $N' \in \mathbb{N}$. Donc pour chaque terme on utilise la série de Taylor (en (6.37)) d'ordre N' avec $N < \dfrac{N'}{m+1}$ dans la forme asymptotique (6.32), pour n pair, on obtient

$$\sum_{\lambda \in \sigma(\widehat{L}_\hbar)} f(\lambda) \;=\; \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N'} \hbar^{2j-n+\frac{k}{(m+1)}} \gamma_{k,j} + \mathcal{O}(\hbar^N)$$

d'ou (6.34).

Pour (6.35), grâce au théorème de résidus, on a

$$C_0^{(n)}(f, P_m) = 2(-1)^{n/2}(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \Big(f(P_m(x) + i|\xi|) + f(P_m(x) - i|\xi|) \Big) dx d\xi,$$

en faisant le changement de variables pour $\alpha > 0$

$$\xi = \alpha^{-1}\eta \Rightarrow d\xi = \alpha^{-n} d\eta,$$

on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \Big(f(P_m(x) + i|\xi|) \Big) dx d\xi = \alpha^{-n} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \Big(f(P_m(x) + i|\eta|) \Big) dx d\eta,$$

par prolongement analytique on peut poser $\alpha = i$, d'où on a (6.35) pour n pair.
Pour n impair, on obtient $C_0^{(n)}(f, P_m) = 0$.
On utilise le théorème 6.3.1, on a

$$C_{2j}^{(n)}\Big(f, P^{(\varepsilon)}\Big) = 0,$$

pour $n \geq 4j + 1$ et pour tout ε assez petit. On suppose que $n = 4j_0 - 3$ ou $n = 4j_0 - 1$ pour $j_0 \geq 1$, il en résulte alors la formule (6.36), de plus en utilisant le théorème 6.3.1 $\gamma_{0,j_0} \neq 0$, pour $n = 1$, $n = 3$. □

7

Estimation du nombre de valeurs propres dans des disques

Sommaire

Dans ce chapitre nous donnons des estimations sur le nombre de valeurs propres dans un disque pour la famille quadratique d'opérateurs semi-classiques :

$$\widehat{L}(z) = -\hbar^2 \Delta_x + (P(x) - z)^2 \,,$$

avec P un polynôme elliptique positif de degré $m \geq 2$.

7.1 Estimations

On considère la famille quadratique d'opérateurs semi-classiques :

$$\widehat{L}(z) = -\hbar^2 \triangle_x + (P(x) - z)^2 \tag{7.1}$$

où $\widehat{L}(z)$ est un opérateur avec le $\hbar$-symbole de Weyl :

$$L(z, x, \xi) = \xi^2 + (P(x) - z)^2 .$$

Dans cette section on choisit $f(\lambda) = (\lambda + t)^{-k}$ avec k assez grand, $k > \dfrac{n(m+1)}{m}$, et $t > 0$.

On désigne

$$N_\hbar(R) = \#\{\mu \in \mathrm{Sp}[\widehat{L}];\ |\mu| \leq R\},$$

et $N(R) = N_{\hbar=1}(R)$.

Proposition 7.1.1. *Pour tout k, $k > \dfrac{n(m+1)}{m}$, il existe une constante $C_k > 0$ telle que :*

$$N_\hbar(R) \leq C_k R^k \hbar^{-n}, \ \ \forall R \geq 1,\ \forall \hbar \in]0, 1]. \tag{7.2}$$

Si $C_{2j}^{(n)}(f) \neq 0$ avec $n > 2j$, alors pour tout $r > 0$, $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C_{\varepsilon,r} > 0$ telle que

$$N_\hbar(r\hbar^{-\varepsilon}) \geq C_{\varepsilon,r} \hbar^{-\delta}, \ \ \forall \hbar \in]0, 1], \tag{7.3}$$

où $\delta = n - 2j$.

De plus, si $j = 0$, n est pair, l'estimation est vérifié pour $\varepsilon = 0$. Donc, dans le cas d'une dimension paire, pour tout $R > 0$, $N_\hbar(R)$ se comporte comme $\hbar^{-n}$.

Preuve :

Pour (7.2), on utilise l'inégalité de Weyl-Ky-Fan (A.1.6) de la forme donné en [2].
Soit s_j les valeurs propres de $(\mathcal{A}_{\widehat{L}}^* \mathcal{A}_{\widehat{L}})^{\frac{1}{2}}$ et soit

$$\nu_\hbar(R) = \# \{j, s_j \leq R\} .$$

où $\mathcal{A}_{\widehat{L}}$ est l'opérateur matriciel non autoadoint obtenu par la linéarisation de $\widehat{L}$. On suppose que le symbole de $\mathcal{A}_{\widehat{L}}$ est inversible dans un voisinage de 0. Donc on peut écrire l'inégalité de Weyl-Ky-Fan dans la formule suivante (c.f. [2] et théorème A.1.6) :

$$\int_0^R \frac{N_\hbar(r)}{r} dr \leq \int_0^R \frac{\nu_\hbar(r)}{r} dr, \quad \forall R > 0. \tag{7.4}$$

L'intégrale à gauche vérifie l'inégalité suivante :

$$N_\hbar(R) \int_R^{2R} \frac{1}{r} dr \leq \int_R^{2R} \frac{N_\hbar(r)}{r} dr,$$

d'où on a l'inégalité :

$$N_\hbar(R) \leq \frac{1}{\log 2} \int_0^{2R} \frac{N_\hbar(r)}{r} dr. \tag{7.5}$$

En utilisant les calculs semi-classiques donné en [12] et en les applicant pour $(\mathcal{A}^*_{\widehat{L}} \mathcal{A}_{\widehat{L}})^{\frac{1}{2}}$ on obtient que :

$$\nu_\hbar(r) = O(r^{\frac{n(m+1)}{m}} \hbar^{-n}),$$

on obtient alors (7.2) en utilisant (7.5).

Pour (7.3), on note que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R_\varepsilon > 0$ tel que $|\mu| \geq R_\varepsilon$

$$-\pi/2 - \varepsilon \leq \arg \mu \leq \pi/2 + \varepsilon.$$

Alors on a

$$|t + \mu|^2 \geq (1 - \varepsilon)(t^2 + |\mu|^2).$$

On choisit $f(\mu)(\mu + t)^{-k}$ avec k assez grand , $k > \frac{n(m+1)}{m}$ et $t > 0$. En utilisant la forme asymptotique (6.11) on obtient

$$C_1 \hbar^{-\delta} \leq |\sum_\mu (t + \mu)^{-k}| \leq \sum_\mu |t + \mu|^{-k} \leq C_2 \sum_\mu (t + |\mu|)^{-k}$$

Mais pour tout k, k_1, assez grands, tels que $k - k_1$ est assez grand, on a

$$\sum_{|\mu| \geq R} (t + |\mu|)^{-k} \leq R^{-k_1} \sum_\mu (t + |\mu|)^{k_1 - k}$$

On choisit maintenant $R = r\hbar^{-\varepsilon}$ pour obtenir

$$N_\hbar(r\hbar^{-\varepsilon}) \geq \sum_{|\mu|\leq R} (1+|\mu|)^{-k} \geq c_{\varepsilon,r}\hbar^{-\delta}.$$

□

On donne maintenant la preuve de l'inégalité (7.4), on utilise l'inégalité de Weyl-Ky-Fan (W1) pour l'opérateurs matriciel $\mathcal{A}_{\widehat{L}}^{-1}$, donc on a :

$$|\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\cdots\lambda_N^{-1}| \leq s_1^{-1}\cdots s_N^{-1},$$

où $\{\lambda_j\}$ sont les valeurs propres de $\mathcal{A}_{\widehat{L}}$ et $\{s_j\}$ sont les valeurs propres de $(\mathcal{A}_{\widehat{L}}^*\mathcal{A}_{\widehat{L}})^{\frac{1}{2}}$ et $N(r) = \#\{j : |\lambda_j| \leq r\}$. D'où on a :

$$-\left(\log|\lambda_1| + \cdots + \log|\lambda_N|\right) \leq -\left(\log s_1 + \cdots + \log s_N\right). \tag{7.6}$$

En utilisant la notation des intégrales de Stieljès on a l'égalité suivante :

$$\int_0^R \log r \quad dN(r) = -\int_0^R \frac{N(r)}{r}dr.$$

On suppose pour simplifier :

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_N|.$$

On sait que lorsque $|\lambda_1| \geq r$ on a $N(r) = 0$ et lorsque $|\lambda_i| \leq r \leq |\lambda_{i+1}|$ on a $N(r) = i$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^R \frac{N(r)}{r}dr &= \int_0^{|\lambda_1|} \frac{N(r)}{r}dr + \int_{|\lambda_1|}^{|\lambda_2|} \frac{N(r)}{r}dr + \cdots + \int_{|\lambda_{N-1}|}^{|\lambda_N|} \frac{N(r)}{r}dr + \int_{|\lambda_N|}^{R} \frac{N(r)}{r}dr \\
&= \int_{|\lambda_1|}^{|\lambda_2|} \frac{1}{r}dr + \cdots + \int_{|\lambda_{N-1}|}^{|\lambda_N|} \frac{1}{r}dr + \int_{|\lambda_N|}^{R} \frac{1}{r}dr \\
&= (\log|\lambda_2| - \log|\lambda_1|) + 2(\log|\lambda_3| - \log|\lambda_2|) + \cdots + N(\log R - \log|\lambda_N|) \\
&= -(\log|\lambda_1|) + \cdots + \log|\lambda_{N-1}| + \log|\lambda_N|) + N\log R
\end{aligned}$$

en utilisant (7.6) on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^R \frac{N(r)}{r}dr &\leq -\left(\log s_1 + \cdots + \log s_N\right) \\
&= \int_0^R \frac{\gamma(r)}{r}dr,
\end{aligned}$$

d'où on obtient (7.4).

Le résultat précédent concerne le régime semi-classique. Le résultat suivant donne des estimations pour $\hbar = 1$.

Corollaire 7.1.1. *Pour $R \nearrow +\infty$ on a*

$$N(R) = \mathcal{O}(R^{n(m+1)/m}).$$

Si $C_{2j}^{(n)}(f) \neq 0$ avec $n - 2j > 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_\varepsilon > 0$ telle que

$$c_\varepsilon R^{\delta(m+1)/m-\varepsilon} \leq N(R).$$

Bibliographie

[1] Fatima Mohamad Aboud, Didier Robert :

Asymptotic expansion for non linear problems, (accepté au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées).

[2] M.S. Agranovich et A.S. Markus :

On spectral proporties of elliptic pseudo-differentiel operators far from self-adjoint ones, Zeitschrift für Analysis unt ihre Anwendungen. Bd 8 (3), p.237-260, 1989.

[3] Anne Balazard-Konlein :

Calcul fonctionnel pour des opérateurs h-admissibles à symbole opérateur et applications, thèse de doctorat, Université de Nantes, 1985.

[4] M.S. Baouendi, C.Goulaouic :

Non analytic-hypoellipticity for some degenrate elliptic operators, Bull. of A.M.S, vol.78, No.1, p.483-486, May 1972.

[5] R. Beals :

A general calculus of pseudo-differential operators, Duke Math. J., p.1-42,1977.

[6] M. Birman, M. Solomjak :

Spectral Theory of self-adjoint operators in Hilbert space. D.Reidel Publishing Company, 1986.

[7] A. Bouzouina, Didier Robert :

Uniform semiclassical estimates for the propagation of quantum observables, Duke Math. J., vol. 111, No.2,p.223-252, 2002.

[8] Sagun Chanillo,Bernard Helffer, Ari Laptev :

Nonlinear eigenvalues and analytic hypoellipticity, Journal of Functional Analysis, 209, p.425-443, 2004.

[9] Monique Dauge, Didier Robert :

Weyl's formula for a class of pseudodifferential operators with negative order on $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, Lecture Notes in Math. 1256, Springer, Berlin, p.91-122, 1987.

[10] A. Fridman, M. Shinbrot :

Non-linear eigenvalue problems. Acta Mathematica 121, p.77-128, 1968.

[11] Bernard Helffer :

Remarques sur des résultats de G. Métivier sur la non-hypo-analyticité, Séminaire de l'Université de Nantes, exposé No.9, 1978-1979.

[12] Bernard Helffer, Didier Robert :

Calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et opérateurs admissibles, Journal of functional analysis, 1983, vol. 53, no3, pp. 246-268.

[13] Bernard Helffer, Didier Robert :

Semiclassical Analysis of nonlinear eigenvalue problem and non analytic hypoellipticity, October 21, 2003.

[14] Bernard Helffer, Didier Robert :

Propriétés asymptotiques du spectre d'opérateurs pseudo-différentiels sur $\mathbb{R}^n$, Comm. in P.D.E.,Vol.7,p.795-882, 1982.

[15] Bernard Helffer, D. Robert, Xue Ping Wang :

Semiclassical analysis of a non linear eigenvalue problem and analytique hypoellipticity, St-Petersburg Mathematical Journal, Vol. 16, No 1, p. 285-296, 2005.

[16] H. O. Cordes :

On compactness of commutators of multiplications and convolutions and boundness of pseudodifferential operators, J. Functional Analysis, 18 (1975), 115-131.

[17] N.Dunford and J.T.Schwartz :

Linear Operators, Vol.2, Interscience Publ., 1963.

[18] I. Gohberg et M. G. Krein :

Introduction à la théorie des opérateurs linéaires non autoadjoints, Dunod, 1972.

[19] M. V. Keldys :

Valeurs propres et fonction propres de certaines classes d'équations non auto-adjointes, DAN,77,No. 1, 11-14, (1951).

[20] M. V. Keldysh :

On the completness of the eigenfunctions of classes of non-selfadjoint linear operators, Russian Math. Surveys 26, No.4, 15-44, (1971).

[21] M.G. Krein et H.Langer :

On some mathematical principles in the linear theory of damped oscillations of continua I, Integral Equations and operators Theory, Vol.1, 364-399, 1978.

[22] Gilles Lebeau :

Equation des ondes amorties, Séminaire Équations aux partielles (Polytechnique), 1993-1994, exp. No.15, p.1-14 (disponible sur http ://www.numdam.org/).

[23] A.S. Markus :

Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils, vol.71, Translation of mathematical monographs. American Mathematical Society.

[24] G. Metivier :

Une classe d'opérateurs non hypoelliptiques-analytiques. Séminaire Goulaouic-Schwartz-Ecole Polytechnique, (1978/1979), (disponible sur http ://www.numdam.org/).

[25] Pham The Lai, Didier Robert :

Sur un problème aux valeurs propres non linéaire, Israel journal of mathematics, vol.36, No.2, p.169-186, 1980.

[26] M. Christ :

Some non-analytic-hypoelliptic sums of squares of vector fields, Bull.A.M.S., vol.26, No.1, p.137-140, 1992.

[27] Didier Robert :

Non linear eigenvalue problems, Matemàtica Contemporanea, vol.26, p.109-127, 2004.

[28] Didier Robert :

Propriétés spectrales d'opérateurs pseudodifferentiels, Comm. Partial Differential Equitions, 3 (1978),755-826.

[29] Didier Robert :

Non linear eigen value problems with small parameter, Integral Equations and Operators Theory, Vol.7, p.231-240, (1984).

[30] Didier Robert :

Autour de l'approximation semi-classique, Progress in Mathematics no.68, Birkhäuser, (1987).

[31] C. Rondeaux :

Classe de Schatten d'opérateurs pseudo-différentiels, Annales scientifiques de l'É.N.S, 4^e série, tome 17, no. 1, 67-81, (1984).

[32] B. Simon :

Trace Ideals and thier applications. London Mathematical Society. Lecture Note Series 35. Cambridge University Press, 1979.

[33] R. T. Seeley :

Complex power of an elliptic operator, Singular integrals, Proc. Symposia Pure Math., 10, American Mathematical Society, 1967, 288-307.

[34] E. C. Titchmarch :

The theory of functions, Oxford University Press, 1939.

A

Théorème de Lidskii

A.1 Preuve du théorème de Lidskii

Soient $T \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$ (opérateur compact), et $\mathcal{H}$ espace de Hilbert séparable. Si $r(T) \neq 0$ (rayon spectral) on ordonne les valeurs propres non nulles de T en une suite décroissante en module $|\lambda_1(T)| \geq |\lambda_2(T)| \geq \cdots \geq |\lambda_n(T)| \geq \cdots$, chaque valeur propre étant répétée suivant sa multiplicité algébrique.
Le résultat suivant est appelé le théorème de Lidskii.

Théorème A.1.1. *Pour tout $T \in \mathcal{C}^1(\mathcal{H})$ on a $Tr(T) = \sum_{j\geq 1} \lambda_j(T)$.*

Pour le cas $dim(\mathcal{H}) < +\infty$, ce résultat est connu, car la trace d'une matrice est la somme des valeurs propres de cette matrice. Nous allons ici donner une preuve de ce théorème en suivant Birman-Solomjak (c.f. [5]).

Définition A.1.1. *Soit $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$. On appelle multiplicité algébrique de λ la dimension (finie) du sous espace propre généralisé*

$$\mathcal{E}_T(\lambda) = \cup_{k\geq 1} ker(T - \lambda\mathbb{I})^k.$$

On pose

$$\mu_T(\lambda) = dim(\mathcal{E}_T(\lambda)).$$

On appelle indice de la valeur propre λ, le plus petit entier $\nu_T(\lambda) \geq 1$ tel que

$$ker(T - \lambda\mathbb{I})^{\nu+1} = ker(T - \lambda\mathbb{I})^{\nu}.$$

Remarque A.1.1. *La multiplicité géomètrique est $m_T(\lambda) = dim(ker(T - \lambda\mathbb{I}))$. On sait que pour les opérateurs autoadjoints on a $m_T(\lambda) = \mu_T(\lambda)$.*

Maintenant, pour étudier les valeurs propres et les sous-espaces propres généralisés on donne quelques propriétés des intégrales de Riesz.

Définition A.1.2. *Soit Ω une partie bornée de $\mathbb{C}$ dont la frontière $\partial\Omega$ est une courbe $\mathcal{C}^1-$par morceaux vérifiant $\sigma(T) \cap \partial\Omega = \emptyset$. On appelle intégrale de Riesz, l'intégrale à valeurs opérateurs suivante :*

$$\Pi_T(\Omega) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Omega}(z\mathbb{I} - T)^{-1}dz$$

Remarque A.1.2. *On a*
i) $\Pi_T(\Omega)^2 = \Pi_T(\Omega)$ (i.e. $\Pi_T(\Omega)$ est un projecteur oblique).
En particulier $\|\Pi_T(\Omega)\| \leq 1$.
ii) $T\Pi_T(\Omega) = \Pi_T(\Omega)T$.
En particulier, on choisit pour Ω un petit ouvert tel que $\Omega \cap \sigma(T) = \{\lambda\}$, on pose alors $E_T(\lambda) = \Pi_T(\Omega)$ (par le théorème de Cauchy, $\Pi_T(\Omega)$ ne dépend pas du Ω particulier).
iii) Si on pose $\mathcal{H}_\Omega = \Pi_T(\Omega)\mathcal{H}$ (Image du projecteur $\Pi_T(\Omega)$), alors $T_\Omega = T\backslash_{\mathcal{H}_\Omega} : \mathcal{H}_\Omega \to \mathcal{H}_\Omega$.

On a le résultat suivant.

Lemme A.1.1. $\Omega \cap \sigma(T) = \sigma(T_\Omega)$.

Preuve :

Soit $\lambda \notin \sigma(T_\Omega)$, i.e. $(\lambda\mathbb{I} - T)\Pi_T$ est inversible sur $\mathcal{H}_\Omega$ et $\exists A \in \mathsf{L}(\mathcal{H}_\Omega)$ tel que

$$(\lambda\mathbb{I} - T)Au = A(\lambda\mathbb{I} - T)u = u\ , \quad \forall u \in \mathcal{H}_\Omega.$$

Soit :

$$g(z) = \begin{cases} 0 & \textit{dans un voisinage de } \Omega \\ \frac{1}{\lambda - z} & \text{l'extérieure } d'un\ voisinage\ de\ \Omega \end{cases}$$

Donc $g(T)(\lambda\mathbb{I} - T) = (\lambda\mathbb{I} - T)g(T) = \mathbb{I} - \Pi_T(\Omega)$.

On définit

$$A_1 u = A\Pi_T(\Omega)u, \forall u \in \mathcal{H}.$$

On a alors

$$(\lambda\mathbb{I} - T)(A_1 + g(T)) = (A_1 + g(T))(\lambda\mathbb{I} - T) = \mathbb{I},$$

i.e. $\lambda \in \rho(T)$ d'où

$$\sigma(T) \cap \Omega \subseteq \sigma(T_\omega).$$

Inversement, soit $\lambda \notin \sigma(T) \cap \Omega$. On considère

$$h(z) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda - z} & \textit{dans un voisinage de } \sigma(T) \textit{ne contenant pas } \lambda \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On a

$$h(T)(\lambda\mathbb{I} - T) = (\lambda\mathbb{I} - T)(h(T)) = \Pi_T(\Omega)$$

donc

$$\begin{aligned} (h(T))_\Omega(\lambda\mathbb{I}_\Omega - T_\Omega) &= (\lambda\mathbb{I}_\Omega - T\Omega)(h(T))_\Omega \\ &= \mathbb{I}_\Omega \end{aligned}$$

d'où $\lambda \notin \sigma(T_\Omega)$ par suite

$$\Omega \cap \sigma(T) = \sigma(T_\Omega)$$

et de plus $R(\lambda, T_\Omega) = R(\lambda, T)_\Omega$. □

Remarque A.1.3. $z \mapsto (z\mathbb{I} - T)^{-1}$ *est holomorphe dans*

$$\tilde{D}(\lambda, r) = \{z : 0 < |z - \lambda| < r\},$$

on a donc $(z\mathbb{I} - T)^{-1}$ *admet un développement de Laurent, convergeant dans*

$$0 < r \leq |z - \lambda| \leq r' < r,$$

i.e.

$$(z\mathbb{I} - T)^{-1} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m (z-\lambda)^m,$$

avec $A_m \in \mathsf{L}(\mathcal{H})$ *et*

$$A_m = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'_r} (z-\lambda)^{-m-1}(z\mathbb{I} - T)^{-1} dz,$$

où

$$\gamma_{r'} = \{z : |z-\lambda| = r'\}.$$

Or pour $m \leq -1$ *on a*

$$A_m = (T - \lambda\mathbb{I})^{-m-1} E_T(\lambda).$$

Théorème A.1.2. *Si* λ *est un pôle d'ordre* ν *de la résolvante* $R_T(z) := (z\mathbb{I} - T)^{-1}$ *alors* λ *est une valeur propre d'indice* ν *de* T. *De plus, si* $\lambda \in \sigma(T)$ *est un point isolé de* $\sigma(T)$ *alors* λ *est un pôle de* R_T *si et seulement si* $(\lambda\mathbb{I} - T)^\nu E_T(\lambda) = 0$ *et* $(\lambda\mathbb{I} - T)^{\nu-1} E_T(\lambda) \neq 0$.

Preuve :

On suppose d'abord que λ est une valeur propre d'indice n. On a alors

$$z\mathbb{I} - T = (z-\lambda)\mathbb{I} + \lambda\mathbb{I} - T = (z-\lambda)(\mathbb{I} - \frac{T-\lambda\mathbb{I}}{z-\lambda}),$$

donc $|z-\lambda| > \|T - \lambda I\|$ d'où

$$R_T(z) = \sum_{j\geq 0} \frac{(T-\lambda\mathbb{I})^j}{(z-\lambda)^{j+1}}.$$

Alors si $(\lambda\mathbb{I} - T)^n u = 0$ et $(\lambda\mathbb{I} - T)^{n-1} u \neq 0$, $j \geq 0$ on a

$$R_T(z)u = \sum_{j=0} n-1 \frac{(T-\lambda\mathbb{I})^j u}{(z-\lambda)^{j+1}},$$

qui est une fonction méromorphe avec un pôle en $z = \lambda$. Donc si Γ est une courbe entourant $\sigma(T)$ et γ un petit cercle autour de λ, on a

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma R_T(z) u dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma R_T(z) u dz \\ &= E_T(\lambda) u. \end{aligned}$$

et

$$(\lambda\mathbb{I} - T)^{n-1} E_T(\lambda) u = (\lambda\mathbb{I} - T)^{n-1} u \neq 0$$

donc

$$n \leq \nu.$$

Inversement, soit λ un pôle d'indice ν. On a

$$(\lambda\mathbb{I} - T)^{\nu} E_T(\lambda) = 0$$

et

$$(\lambda\mathbb{I} - T)^{\nu-1} E_T(\lambda) \neq 0$$

i.e. $\exists u$ tel que

$$(\lambda\mathbb{I} - T)^{\nu} u = 0$$

et

$$(\lambda\mathbb{I} - T)^{\nu-1} \neq 0$$

donc $\nu_T(\lambda) < n$. □

Théorème A.1.3. *Soit λ un pôle d'ordre ν de R_T et soit $\sigma_1 = \sigma(T) \setminus \{\lambda\}$, alors :*

$$E_T(\lambda)\mathcal{H} = \mathcal{H}_\lambda = ker(T - \lambda\mathbb{I})^{\nu}.$$

$$\mathcal{H}_{\sigma_1} = \Pi(\sigma_1)\mathcal{H} = Im(T - \lambda\mathbb{I})^{\nu}.$$

Preuve :

$T - \lambda\mathbb{I}$ est une bijection de $\mathcal{H}_{\sigma_1}$ sur $\mathcal{H}_{\sigma_1}$, i.e.

$$(T - \lambda\mathbb{I})^{\nu}\mathcal{H}_{\sigma_1} = \mathcal{H}_{\sigma_1}.$$

Or

$$(T - \lambda\mathbb{I})^{\nu}\mathcal{H}_\lambda = 0$$

entraîne que

$$(T - \lambda\mathbb{I})^{\nu}\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\sigma_1}.$$

Donc

$$\mathcal{H}_\lambda \subseteq ker(T-\lambda\mathbb{I})^\nu.$$

Maintenant, si $(T-\lambda\mathbb{I})^\nu u = 0$ alors

$$0 = (T-\lambda\mathbb{I})^\nu(E_T(\lambda)u + \Pi_T(\sigma_1)u)$$

$$= (T-\lambda\mathbb{I})^\nu \Pi_T(\sigma_1)u$$

donc

$$\Pi_T(\sigma_1)u = 0,$$

d'où on a les deux égalités. □

Remarque A.1.4. *On peut conclure de ce qui précède que si $\lambda \in \Omega$, alors λ est un pôle d'ordre ν de T si et seulement si λ est un pôle d'ordre ν de T_Ω.*

Théorème A.1.4. *Soit $T \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$ (opérateur compact). Alors $\forall\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$ est un pôle de R_T et est d'indice fini. De plus on a :*

$$E_T(\lambda)\mathcal{H} = \{u \in \mathcal{H} : \ (T-\lambda\mathbb{I})^\nu u = 0\},$$

où ν est l'ordre du pôle.

Preuve : On sait que $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est un ensemble de valeurs propres de multiplicité finie sans point d'accumulation autre que 0. Soit $T_\lambda = T\backslash_{\mathcal{H}_\lambda}$ où $\mathcal{H}_\lambda = E_T(\lambda)\mathcal{H}$. D'aprés ce qui précède,

$$\sigma(T_\lambda) = \{\lambda\}$$

donc T_λ est inversible alors

$$dim(E_T(\lambda)\mathcal{H}) < +\infty$$

ce qui entraîne qu'il existe $\nu \geq 1$ tel que $(T_\lambda - \lambda\mathbb{I})^\nu = 0$ donc λ est un pôle de R_{T_λ} par suite λ est un pôle de R_T alors on en déduit le théorème. □

Le résultat suivant sera utile pour la preuve de théorème suivant.

Lemme A.1.2. *Si P et Q sont deux projecteurs de $\mathcal{H}$ et si $\|P-Q\| < 1$, alors $dim(P\mathcal{H}) = dim(Q\mathcal{H})$.*

Preuve :

L'opérateur $\mathbb{I} - (P-Q)$ est inversible et

$$(\mathbb{I} - (P-Q))^{-1} = \sum_{j \geq 0} (P-Q)^j$$

donc $(\mathbb{I} - P + Q)\mathcal{H} = \mathcal{H}$ d'où

$$P\mathcal{H} = P(\mathbb{I} - P + Q)\mathcal{H} = PQ\mathcal{H}$$

Soit $f \in Q\mathcal{H}$ on a

$$\|Pf\| = \|f + (P-Q)f\| \geq (\mathbb{I} - \|P-Q\|)\|f\|,$$

d'où

$$P : Q\mathcal{H} \to P\mathcal{H}$$

est bijective et bicontinue. □

Théorème A.1.5. ***(Continuité et Stabilité du Spectre)***
Soit $\{T_n\}$ une suite d'opérateurs compacts. On suppose que T_n converge vers T au norme d'opérateurs (i.e. converge uniformement sur la boule unité de $\mathcal{H}$). Alors on peut réordonner la suite, $\{\lambda_m(T_n)\}_n$, des valeurs propres non nulles de T_n, telle que

$$\forall m \geq 1\,, \quad \lim_{n \to \infty} \lambda_m(T_n) = \lambda_m(T).$$

Preuve : On entoure chaque valeur propre non nulle $\lambda_m(T)$ d'un petit cercle γ_m tel que les disques correspondants, D_m, soient disjoints. Pour $\lambda = \lambda_m(T)$ on a

$$E_T(\lambda) - \Pi_{T_n}(D_m) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_m} (R_T(z) - R_{T_n}(z))dz.$$

Or

$$\|R_T(z) - R_{T_n}(z)\| \leq \|T - T_n\| \|R_T(z)\| \|R_(T_n)(z)\|$$

donc

$$\|R_{T_n}(z)\| \leq \|R_T(z)\| + \|T - T_n\| \|R_T(z)\| \|R_{T_n}(z)\|.$$

On choisit n assez grand pour que

$$\|T - T_n\| \sup_{z \in \gamma_m} \|R_T(z)\| \leq \frac{1}{2}$$

d'où

$$\|R_{T_n}(z)\| \leq 2\|R_T(z)\|$$

et

$$\|R_{T_n}(z) - R_T(z)\| \leq 2\|T - T_n\| \|R_T(z)\|^2$$

d'où il existe $N'_m > 1$ tel que quelque soit $n \geq N'_m$ on ait

$$\|E_T(\lambda) - \Pi_{T_n}(D_m)\| < 1$$

Par suite en utilisant le lemme A.1.2 on a

$$dim(E_T(\lambda)\mathcal{H}) = dim\Pi_{T_n}(D_m).$$

Donc dans D_m, T_n a autant de valeurs propres que T. On peut faire cela $\forall m \leq M$ et M fixé. $\square$

On a besoin du résultat suivant pour la preuve des inégalités de Weyl-Ky-Fan.

Lemme A.1.3. *Soient $\alpha = \{\alpha_k\}_{1 \leq k \leq n}$, $\beta = \{\beta_k\}_{1 \leq k \leq n}$ deux suites réelles décroissantes. On dira que $\alpha \leq \beta$, si et seulement si $\forall k$, $1 \leq k \leq n$, on a $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \leq \sum_{j=1}^{k} \beta_j$.*
Alors si φ est convexe, et

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0,$$

on a

$$\sum_{j=1}^{k} \varphi(\alpha_j) \leq \sum_{j=1}^{k} \varphi(\beta_j), \ \forall k, \ 1 \leq k \leq n.$$

Preuve :

φ' existe presque partout et φ est une fonction croissante on a alors :

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} (x-u)d\varphi'(u) \quad (intgrale\, de\, Stieljs)$$

On vérifie que φ est $\mathcal{C}^2$ et $d\varphi'(x) = \varphi''(x)dx$ est une mesure positive. Alors on a :

$$\sum_{j=1}^{k} \varphi(\alpha_j) = \int \sum_{j=1}^{k} (\alpha - u)_+ d\varphi'(u).$$

Il suffit donc de prouver l'inégalité pour $\varphi(x) = x^+ = max\{x, 0\}$.

On désigne par p le nombre de j tel que :

$$\alpha_j > 0 \quad (1 \leq j \leq n),$$

et par q le nombre de j tel que :

$$\beta_j > 0 \quad (1 \leq j \leq n).$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_j \beta_j^+ - \sum_j \alpha_j^+ &= \textstyle\sum_{j=1}^{p} \beta_j - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{p} (\beta_j - \alpha_j) - \sum_{j=q+1}^{p} \beta_j \quad (si\; q \leq p) \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{p} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{j=p+1}^{q} \beta_j \quad (si\; q > p)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_j \beta_j^+ \geq \sum \alpha_j^+.$$

□

Théorème A.1.6. ***(Inégalités de Weyl-Ky-Fan)***

Soit $T \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$. On a alors $\forall m \geq 1$

$$\begin{aligned}
&(W1) \quad |\lambda_1(T).\lambda_2(T)...\lambda_m(T)| \leq s_1(T)...s_m(T) \\
&(W2) \quad \textstyle\sum_{j=1}^{m} |\lambda_j(T)|^p \leq \sum_{j=1}^{m} s_j(T)^p\,, \quad \forall p > 0
\end{aligned}$$

Preuve :

On considère les valeurs propres non nulles de T. Soient $\Omega_\delta = \mathbb{C} \setminus \{z : |z| \leq \delta\}$ et $\delta > 0$, $T_\delta = \Pi_T(\Omega_\delta)T$, δ est choisi de telle sorte que :

$$\sigma(T_\delta) \setminus \{0\} = \{\lambda_1(T), \cdots, \lambda_m(T)\}.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \Pi_{k=1}^m |\lambda_k(T)|^2 &= \Pi_{k=1}^m |\lambda_k(T_\delta)|^2 \\ &= |det(T_\delta)|^2 \\ &= det(T_\delta^* T_\delta) \Pi_{k=1}^m \lambda_k(T_\delta^* T_\delta) \\ &= \Pi_{k=1}^m s_k^2(T_\delta) \\ &\leq \Pi_{k=1}^m s_k^2(T). \end{aligned}$$

La dernière inégalité vient du fait que :

$$T_\delta = \Pi_T(\Omega_\delta)T \;, \quad \|\Pi_T(\Omega_\delta)\| \leq 1,$$

d'où l'inégalité (W1).

Pour la preuve de (W2), on utilise le lemme A.1.3 avec

$$\alpha_j = \log|\lambda_j(T)| \;, \quad \beta_j = \log s_j(T) \;,$$

et :

$$\varphi(t) = e^{tp}.$$

Il résulte de (W1) que $\alpha = (\alpha_j)$, $\beta = (\beta_j)$ vérifie l'hypothése de (W1) :

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n e^{p\alpha_j} \leq \sum_{j=1}^n e^{p\beta_j},$$

d'où l'inégalité $(W2)$. □

Avant de donner le théorème de Lidskii on rappelle la définition du trace d'un opérateur.

Définition A.1.3. *Soit T un opérateur de classe trace sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ (on rappelle qu'un opérateur est de classe trace s'il appartient à la classe de Schatten $\mathcal{C}^1$), et soit $\{e_\alpha\}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}$, alors*

$$\sum_\alpha |(Ae_\alpha, e_\alpha)| < +\infty,$$

et

$$Tr(T) = \sum_\alpha (Ae_\alpha, e_\alpha),$$

où $Tr(T)$ désigne la trace de l'opérateur T.

Théorème A.1.7. ***(Théorème de Lidskii (1960))***
$\forall T \in \mathcal{C}^1(\mathcal{H})$ on a $Tr(T) = \sum_{j\geq 1} \lambda_j(T)$.

Pour la preuve de ce théorème on pose :

$$\Lambda(T) = \sum_{j\geq 1} \lambda_j(T).$$

Si T est de rang fini, il résulte d'une propriété classique des matrices que $\Lambda(T) = Tr(T)$. Ensuite on va montrer que cette égalité se prolonge à $\mathcal{C}^1(\mathcal{H})$ par densité. La preuve que l'on va donner ici est dûe à Leiterer et Pietsch [6].
Pour cela on écrit pour T la décomposition de Schmidt

$$Tu = \sum_{k\geq 1} s_k(T) \langle u, \varphi_k \rangle \psi_k,$$

et on pose

$$T_j u = \sum_{k=1}^{j} s_k(T) \langle u, \varphi_k \rangle \psi_k,$$

$$r_n(T) = \sum_{n\geq N} (\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{s_k T})^2.$$

On a alors le résultat suivant qui sert pour la démonstration du théorème de Lidskii.

Lemme A.1.4. *On a*

i) $r_1(T) \leq 4\|T\|_1$, *en particulier* $\lim_{N\to+\infty} r_N(T) = 0$.

ii) $\sum_{n\geq N} |\lambda_n(T)| \leq r_N(T)$.

Preuve :

i) Il résulte d'une inégalité de Hardy discrète. En effet pour $u = \{u_k\}_{k\geq 1}$ on pose

$$(Su)_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Montrons alors que S est continue de ℓ_2 dans ℓ_2.

$\forall v = \{v_k\}_{k\geq 1}$ de rang fini on a

$$\langle Su, v\rangle = \sum_{1\leq k\leq n, 1\leq n} \frac{1}{n} u_k v_n.$$

D'où quelque soit $\theta \in]0, \frac{1}{2}[$, l'inégalité de Schwartz donne

$$|\langle Su, v\rangle|^2 \leq (\sum_{\substack{k,n,\\ 1\leq k\leq n}} \frac{1}{n}(\frac{k}{n})^{2\theta}|u_k|^2)(\sum_{\substack{k,n,\\ 1\leq k\leq n}} \frac{1}{n}(\frac{n}{k})^{2\theta}|v_n|^2),$$

Or on a

$$\sum_{n\geq k} \frac{1}{n^{1+2\theta}} \leq C_1(\theta)k^{-2\theta}$$

$$\sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{k^{2\theta}} \leq C_2(\theta)n^{1-2\theta}$$

d'où il résulte que

$$|\langle Su, v\rangle|^2 \leq C(\theta)\|u\|_2\|v\|_2$$

ce qui achéve la preuve de (i).

Pour la preuve de (ii), on a

$$\begin{aligned} |\lambda_n(T)|^n &\leq \Pi_{k=1}^n |\lambda_k(T)| \\ &\leq (\Pi_{k=1}^n \sqrt{s_k(T)})^2 \\ &\leq (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{s_k(T)})^2 \end{aligned}$$

car la moyenne géométrique est inférieure ou égale à la moyenne arithmétique, d'où l'on déduit l'inégalité (ii). □

Preuve du Théorème de Lidskii :

Soit $\Omega = D(0, r)$, où $r > 0$ petit. On suppose que

$$T = T' + T'',$$

avec

$$T' = \Pi_T(\Omega)T \ \ et \ \ T'' = (1 - \Pi_T(\Omega))T.$$

Soit $\{T_j\}$ la suite d'opérateurs de rang fini provenant de la décomposition de Schmidt de T.

Il résulte du théorème (A.1.5) que pour $j \geq j_0$, j_0 assez grand

$$\sigma(T_j) \cap \partial\Omega = \emptyset$$

et

$$\|\Pi_{T_j}(\Omega) - \Pi_T(\Omega)\| \overset{j \to \infty}{\to} 0.$$

On note que

$$r_m(T_j) \leq r_m(T)\ , \quad \forall j, \forall m.$$

Soit $\epsilon > 0$ et $m_\epsilon \geq 1$ tel que :

$$m \geq m_\epsilon \Rightarrow r_m(T) \leq \epsilon.$$

On choisit $r = r_\epsilon$ tel que :

$$r_\epsilon m_\epsilon \leq \epsilon$$

et

$$\sigma(T_j) \cap \partial\Omega_\epsilon = \emptyset\ , \quad \forall j \geq j_\epsilon$$

où $\Omega_\epsilon = D(0, r_\epsilon)$. On a alors :

$$\begin{aligned} |\Lambda(T_j) - \Lambda(T)| &\leq |\Lambda(T_j') - \Lambda(T')| + |\lambda(T_j'') - \Lambda(T'')| \\ &\leq |\Lambda(T')| + |\Lambda(T_j')| + |\Lambda(T_j'') - \Lambda(T'')| \end{aligned}$$

donc $|\lambda_k(T')| < r$, coïncide avec les valeurs propres de T dans Ω_ϵ à l'ordre près, d'où

$$\begin{aligned} |\Lambda(T')| &\leq \textstyle\sum_{k=1}^{m} |\lambda_k(T')| + \sum_{k=m+1}^{\infty} |\lambda_k(T')| \\ &\leq mr_\epsilon + r_{m+1}(T) \\ &\leq 2\epsilon. \end{aligned}$$

On suit la même méthode avec T_j. On a

$$|\Lambda(T_j')| \leq 2\epsilon.$$

Or T_j'' et T'' sont de rang fini, d'où

$$\Lambda(T'') = Tr(T'') \quad et \quad \Lambda(T_j'') = Tr(T_j''),$$

en plus

$$\begin{aligned} |\Lambda(T_j'') - \Lambda(T'')| &= |Tr(T_j'' - T'')| \\ &\leq \|T_j'' - T''\|_1. \end{aligned}$$

Mais

$$T_j'' - T'' = T_j(\mathbb{I} - \Pi_{T_j}(\Omega)) - T(\mathbb{I} - \Pi_T(\Omega)),$$

en prenant la norme, on a l'inégalité

$$\|T_j'' - T''\|_1 \leq \|T - T_j\|_1 + \|T_j\|_1 \|\Pi_{T_j}(\Omega) - \Pi_T(\Omega)\|$$

d'où

$$\lim_{j \to \infty} \|T_j'' - T''\|_1 = 0$$

et $\exists j \geq j_\epsilon$ tel que :

$$|\Lambda(T_j) - \Lambda(T)| \leq 5\epsilon.$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned}
|\Lambda(T) - Tr(T)| &\leq |\Lambda(T) - \Lambda(T_j)| + |\Lambda(T_j) - Tr(T_j)| + |Tr(T_j) - Tr(T)| \\
&\leq 5\epsilon + 0 + \|T_j - T\|_1 \\
&\leq 6\epsilon
\end{aligned}$$

ce qui prouve le théorème de Lidskii. □

A.2 Inégalité équivelante à l'inégalité de Weyl-Ky-Fan

On désigne

$$N_\hbar(R) = \#\{\mu \in \mathrm{Sp}[\widehat{L}];\ |\mu| \leq R\},$$

et $N(R) = N_{\hbar=1}(R)$. Soit s_j les valeurs propres de $(\mathcal{A}^*_{\widehat{L}}\mathcal{A}_{\widehat{L}})^{\frac{1}{2}}$ et soit

$$\nu_\hbar(R) = \#\left\{j, s_j \leq R\right\}.$$

où $\mathcal{A}_{\widehat{L}}$ est l'opérateur matriciel non autoadoint obtenu par la linéarisation de $\widehat{L}$. Avant donner le résultat principale de cette section on donne le lemme suivant.

Lemme A.2.1.

$$\int_0^R \frac{N_\hbar(r)}{r}dr \leq \int_0^R \frac{\nu_\hbar(r)}{r}dr, \quad \forall R > 0. \tag{A.1}$$

B

Classes de symboles

Dans cette section, on rappelle quelques définitions et résultats concernant les classes de symboles et d'opérateurs.

B.1 Classes de symboles et d'opérateurs

Définition B.1.1. *Pour une paire (ϕ, φ) de fonctions poids.*
μ est continue telle que :

$$\mu \,:\, \mathbb{R}^{2n} \to]0, +\infty[.$$

(O_1) S'il existe des constantes $C_0 > 0$, $C_1 > 0$ telles que :

$$|y|\phi(x,\xi) + |\eta|\varphi(x,\xi) \leq C_0(\phi\varphi)(x,\xi)$$

entraîne que

$$C_1^{-1}\mu(x,\xi) \leq \mu(x+y,\xi+\eta)| \leq C_1\mu(x,\xi).$$

Alors on dit que μ est (ϕ,φ)-continue.
(O_2) S'il existe $C > 0$, $M > 0$ tels que :

$$\mu(x+y,\xi+\eta) \leq C\mu(x,\xi)\left(1 + |y|\phi(x,\xi) + |\eta|\varphi(x,\xi)\right)^M.$$

Alors on dit que μ est (ϕ,φ)-tempérée.

Définition B.1.2. *Si μ est (ϕ,φ)-tempérée poids, on désigne par $S^{\mu}_{\phi,\varphi}$ la classe de symboles $a \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait*

$$\zeta^{\mu}_{k}(a) = \sup_{\mathbb{R}^{2n},|\alpha+\beta|=k} \|\mu^{-1}\phi^{|\alpha|}\varphi^{|\beta|}\partial^{\alpha}_{\xi}\partial^{\beta}_{x}a\| \leq +\infty.$$

ζ^{μ}_{k} sont des semi-normes pour $S^{\mu}_{\phi,\varphi}$.

On définit maintenant les opérateurs associés à cette classe de symboles.

Définition B.1.3. *Pour un symbole $a \in S^{\mu}_{\phi,\varphi}$ on associe l'opérateur $A = Op^{w}(a)$, où $Op^{w}(a)$ est la quantification de Weyl tel que*

$$Au(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\langle x-y,\xi\rangle}a(\frac{x+y}{2},\xi)u(y)dyd\xi,$$

pour $u \in \mathcal{S}^{n}(\mathbb{R}^{n})$.

De plus on donne les hypothèses suivantes :

(H_1) ϕ^{-1}, φ^{-1} sont bornées sur $\mathbb{R}^{2n}$, (ϕ,φ)-continues et $(1,1)$-tempérées.

(H_2) Il existe $C > 0$, $\delta > 0$ tels que :

$$(\phi\varphi)(x,\xi) \geq C(1+|x|+|\xi|)^{\delta}\ , \quad sur\mathbb{R}^{2n}.$$

(W) μ est (ϕ,φ)-tempérée et $\mu \in S^{\mu}_{\phi,\varphi}$.

(N) Il existe $C_3 > 0$, $C_4 > 0$, γ, γ' tels que :

$$C_4\mu^{\gamma'} \leq (\phi\varphi)^{-1} \leq C_3\mu^{\gamma}\ , \quad sur\mathbb{R}^{2n}.$$

Remarque B.1.1. *On a*

i) Soit $a \in S^{\mu}_{\phi,\varphi}$ à valeur réelle. Les hypothèses (H_1), (H_2), (W) et N entraînent que $A = Op^{w}(a)$ est un opérateurs autoadjoint et compact de noyau

$$K_a(x,y) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^{n}} e^{i\langle x-y,\xi\rangle}a(\frac{x+y}{2},\xi)d\xi.$$

ii) Le spectre de A est discret avec zéro son seul point d'accumulation.

B.1.1 Théorèmes de composition

Théorème B.1.1. ***(Théorème de Composition)***
On suppose que ϕ, φ sont des fonctions poids, si $A \in \mathcal{L}^{\mu_1}_{\phi,\varphi}$ du symbole $a \in \mathcal{S}^{\mu_1}_{\phi,\varphi}$ et $B \in \mathcal{L}^{\mu_2}_{\phi,\varphi}$ du symbole $b \in \mathcal{S}^{\mu_2}_{\phi,\varphi}$, alors $AB \in \mathcal{L}^{\mu_1+\mu_2}_{\phi,\varphi}$. En plus, le symbole $a.b$ de AB admet un développement asymptotique

$$a.b \asymp \sum_{\alpha,\beta} \Gamma(\alpha,\beta) \left(\partial^{\alpha}_{\xi} D^{\beta}_{x} a\right) \left(\partial^{\beta}_{\xi} D^{\alpha}_{x} b\right),$$

dans le sens suivant :
pour un nombre entier N on a

$$a.b - \sum_{|\alpha+\beta|<N} \Gamma(\alpha,\beta) \left(\partial^{\alpha}_{\xi} D^{\beta}_{x} a\right) \left(\partial^{\beta}_{\xi} D^{\alpha}_{x} b\right) \quad \in \mathcal{S}^{\mu_1+\mu_2-(N,N)},$$

où $\Gamma(\alpha,\beta) = (\frac{1}{2})^{\alpha}(-\frac{1}{2})^{\beta}\frac{1}{\alpha!\beta!}$.

Pour donner le théorème d'adjoint il faut faire un rappel de quelques concepts.

On considère la forme sesquilinéaire sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$:

$$(u,v) = \int u(x)\overline{v}(x)\,dx,$$

qui donne une injection de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}'$, où $\mathcal{S}'$ est l'espace des formes antilinéaires sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$. Si $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, on désigne par A^* l'adjoint dans $\mathcal{S}'$. On note que la classe des opérateurs pseudo-différentiels ainsi définie est fermée pour l'adjoint.

Corollaire B.1.1. *Si $A \in \mathcal{L}^{\mu}$, alors A admet un unique prolongement continu de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$.*

Preuve : Soit B la restriction de A^* à $\mathcal{S}$. Alors B^* est le prolongement de A à $\mathcal{S}'$, car $\mathcal{S}$ est dense dans $\mathcal{S}'$, alors le prolongement est unique. $\square$

On peut considérer que A est défini sur $\mathcal{S}'$ par l'identification avec son prolongement. On explique maintenant le concept de développement asymptotique dans $\mathcal{S}^{\mu}$.

On suppose que ϕ, φ sont des fonctions poids et que $(\mu_j)_{j\geq 0}$ est une suite dans $\mathcal{O}(\phi, \varphi)$ telle que :

$$0 \leq \mu_j - \mu_{j+1} \leq \mu_{j-1} - \mu_j, \quad j \geq 1.$$

De plus, on suppose que :

$$\mu_{j+1} \leq \mu_j + c_j, \tag{B.1}$$

$$\mu_j - \mu_{j+1} \leq d_j(\mu_{j-1} - \mu_j) + c_j, \tag{B.2}$$

où c_j et d_j sont des constantes positives.

On voit que (B.1) implique que

$$\mathcal{S}^{\mu_{j+1}} \subset \mathcal{S}^{\mu_j}.$$

Théorème B.1.2. *Si $(\mu_j)_{j\geq 0}$ est une suite dans $\mathcal{O}(\phi, \varphi)$ qui vérifie (B.1) et (B.2), et si $a_j \in \mathcal{S}^{\mu_j}$, alors il existe un symbole $a \in \mathcal{S}^{\mu_0}$ tel que :*

$$a \asymp \sum a_j,$$

dans le sens où

$$(a - \sum_{j<N} a_j) \in \mathcal{S}^{\mu_N}.$$

B.2 Classe de symbole à valeurs opérateurs

On commence par donner la définition de poids tempéré.

Définition B.2.1. *Pour la fonction poids :*

$$m : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^+_*,$$

vérifiant :

i) il existe des constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ telles que pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, $(y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$ on a

$$|y|^2\varphi^2(x,\xi) + |\eta|^2\phi^2(x,\xi) \leq C_1\varphi^2(x,\xi)\phi^2(x,\xi),$$

entraîne que :

$$C_2^{-1}m(x,\xi) < m(x+y,\xi+\eta) < C_2m(x,\xi).$$

ii) il existe une constante $C > 0$, il existe $N \in \mathbb{R}$, tels que pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, $(y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$ on a

$$|y|^2\varphi^2(x,\xi) + |\eta|^2\phi^2(x,\xi) \leq C_1\varphi^2(x,\xi)\phi^2(x,\xi),$$

entraîne que :

$$m(x,\xi) < C\, m(y,\eta)(1 + |x-y|^2\varphi^2(x,\xi) + |\xi-\eta|^2\phi^2(x,\xi))^N.$$

Définition B.2.2. *Soit $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ deux espace de Hilbert, m poids tempéré, et (ϕ, φ) couple de fonctions poids. Un symbole de poids $(m, (\phi, \varphi))$ opérant de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$ est une fonction à valeurs opérateurs, $a \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2))$ vérifiant : pour tous multiindices (α, β), il existe $C_{\alpha\beta}$ tel que pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$*

$$\|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)} \leq C_{\alpha\beta} m(x,\xi)\phi^{-\alpha}(x,\xi)\varphi^{-\beta}(x,\xi).$$

On désigne cette classe de symboles par $S^m_{\phi,\varphi}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, qui est un espace de Fréchet pour les semi-normes naturelles

$$\zeta_N^{(m)}(a) = \sum_{|\alpha|+|\beta|<N} \sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}} \|m^{-1}\phi^{|\alpha|}\varphi^{|\beta|}\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta a\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)} \leq +\infty,$$

pour $N \in \mathbb{N}$.

B.3 Symboles quasi-homogènes

On commence par définir une fonction quasi-homogène.

Définition B.3.1. *Soit X un espace de Banach, une application $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to X$, un multi-indice*

$$\underline{h} \in \mathbb{N}^n, \quad \underline{h} = (h_1, \cdots, h_n)$$

et $d \in \mathbb{C}$. On dit que f est quasi-homogène de type h et de degré d si :

$$f(\rho^{h_1} x_1, \cdots, \rho^{h_n} x_n) = \rho^d (x_1, \cdots, x_n),$$

pour tout $\rho > 0$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

On définit maintenant un symbole quasi-homogène.

Définition B.3.2. *Pour les deux multi-indices*

$$\underline{h} \in N^n, \quad \underline{h} = (h_1, \cdots, h_n)$$

et

$$\underline{k} \in N^n, \quad \underline{k} = (k_1, \cdots, k_n)$$

on pose

$$M = p.p.cm\{h_1, \cdots, h_n, k_1, \cdots, k_n\}.$$

Pour, a, une fonction C^∞ telle que

$$a : \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

avec

$$a(\rho^{h_1} x_1, \cdots, \rho^{h_n} x_n, \rho^{k_1} \xi_1, \cdots, \rho^{k_n} \xi_n) = \rho^M a(x_1, \cdots, x_n, \xi_1, \cdots, \xi_n),$$

où $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est l'espace des opérateurs linéaires continus de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ et

$$\phi_{\underline{h},\underline{k}}(x, \xi) = \varphi_{\underline{h},\underline{k}}(x, \xi) = (1 + \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{2p_i} + \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^{2q_i})^{\frac{1}{2M}},$$

où $p_i = \frac{M}{h_i}$, $q_i = \frac{M}{k_i}$, $1 \leq i \leq n$, $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$.

On voit que (ϕ, φ) est une paire de fonctions poids (c.f. Définition B.1.1).

Définition B.3.3. *On désigne alors par $S^{(d)}_{\underline{h},\underline{k}}(\mathbb{R}^{2n})$ l'espace de fonctions C^∞, a, où a est une somme asymptotique de symboles quasi-homogènes au sens suivant. Il existe une suite $(a_j)_{j\geq 0}$ de fonctions telles que*

$$a_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}, \mathcal{L}(\mathcal{H})),$$

a_j quasi-homogène de type $(\underline{h}, \underline{k})$ de degré $d-j$ telle que pour tout entier $N \geq 0$

$$a - \sum_{j<N} a_j \in S^{(\Re(d-N))}_{\phi,\varphi}(\mathcal{H}).$$

B.4 Symboles $h-$admissibles

Soit $a(x,\xi)$ un symbole. On lui associe l'opérateur $Op^w_\hbar a$, $\hbar > 0$ étant un petit paramètre tel que :

$$(Op^w_\hbar\, a)u(x) = (2\pi\hbar)^{-n} \int e^{\frac{i\langle x-y,\xi\rangle}{\hbar}} a(\frac{x+y}{2}, \xi)u(y)dyd\xi.$$

Notons que $Op^w_1\, a = Op^w\, a$.

Remarque B.4.1. *Un symbole a de poids $(m, (\phi, \varphi))$ opérant de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.*
Avec
i) m poids (ϕ, φ)-tempérées,
ii) a est une fonction à valeurs opérateurs i.e

$$a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{L}(\mathcal{H})),$$

vérifiant que pour tout multi-indices α, β il existe une constante $C_{\alpha,\beta} > 0$ telle que pour tout (x,ξ) on ait

$$\|\partial^\alpha_\xi D^\beta_x a\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C_{\alpha,\beta}.m(x,\xi)\phi(x,\xi)^{-\alpha}\varphi(x,\xi)^{-\beta},$$

où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert.

Définition B.4.1. *On désigne* $\mathbb{S}^m_{\phi,\varphi}(\mathbb{R}^{2n})$ *la classe de symbole* $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{L}(\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n) \times \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)))$*, associée aux semi-normes suivantes :*

$$\varsigma_N^{(m)}(a) = \sup_{\mathbb{R}^{2n}, |\alpha+\beta| \leq N} \|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a\|_{\mathcal{L}(\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)\times \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n)))} m(x,\xi)^{-1}\phi^\alpha \varphi^\beta,$$

pour $N \in \mathbb{N}$*, pour tout multi-indices* α *et* β*.* $\mathbb{S}^m_{\phi,\varphi}(\mathbb{R}^{2n})$ *est un espace de Fréchet muni des semi-normes* $\varsigma_N^{(m)}(a)$*.*

Définition B.4.2. *On appelle symbole* $h-$*admissible toute application* $\mathcal{C}^\infty$*,*

$$a : h \mapsto a(h)$$

définie de $]0, h_0]$*,* $h_0 > 0$ *dans* $\mathbb{S}^m_{\phi,\varphi}(\mathbb{R}^{2n})$ *telle que* $\forall N \geq 0$ *on ait*

$$a(h) = a_0 + h.a_1 + h^N a_N + h^{N+1} r_{N+1}(h)$$

où $a_j \in \mathbb{S}^{m-j}_{\phi,\varphi}(\mathbb{R}^{2n})$ *et* $r_{N+1}(h)$ *décrit une partie bornée de* $\mathbb{S}^{m-(N+1)}_{\phi,\varphi}(\mathbb{R}^{2n})$ *pour* $h \in]0, h_0]$*.*

Soit $a \in \mathbb{S}^m_{\phi,\varphi}(\mathbb{R}^{2n})$ un symbole $h-$admissible. On pose :

$$Op_h(a)u(x) = (2\pi h)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i\langle x-y,\xi\rangle}{h}} a(y,\xi) u(y) dy d\xi,$$

$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On sait que $Op_h(a)$ est un opérateur continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

On donne maintenant la définition d'un opérateur h-admissible

Définition B.4.3. *On appelle opérateur* $h-$*admissible toute application* $\mathcal{C}^\infty$

$$A \ :]0, h_0] \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n))$$

telle qu'il existe une suite

$$a_j \in \mathbb{S}^{m-j}_{\phi,\varphi}(\mathbb{R}^{2n}),$$

et une suite $R_N \in \mathcal{L}(\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n))$*, pour* $N \geq N_0$ *(*N *assez grand) de sorte que*

$$A(h) = \sum_{j=0} h^j Op_h(a_j) + h^{N+1} R_{N+1}(h)$$

et

$$\sup_{h \in]0,h_0]} \|R_{N+1}(h)\|_{\mathcal{L}(\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^n))} < +\infty$$

B.5 Fonction de répartition

On rappelle la définition de la fonction de répartition, F_m, de la fonction de poids m qui est donnée par :

$$F_m(t) = \int_{m(x,\xi)\leq t} dx d\xi.$$

On a alors

$$\int \frac{1}{m^p(x,\xi)} = \int_b^\infty \frac{dF_m(t)}{t^p},$$

où $b = \inf_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}} m(x,\xi) > 0$, le membre à droite étant une intégrale de Stieljès. Si $dF_m(t)$ existe et égale à $F'_m(t)$, alors en faisant l'intégrale par partie on obtient

$$p\int_b^\infty \frac{F'_m(t)}{t^{p+1}} dt.$$

On cherche à déterminer un p optimal pour lequel l'intégrale précédente existe. Il résulte des hypothèses sur m, ϕ, φ qu'il existe une constante $C > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$m(x,\xi) \geq C(1 + |x| + |\xi|)^\delta,$$

d'où on a

$$F_m(t) \leq \int_{C(1+|x|+|\xi|)^\delta \leq t} dx d\xi,$$

en faisant le changement de variables

$$x = t^{\frac{1}{\delta}} x'$$

$$\xi = t^{\frac{1}{\delta}} \xi'$$

on obtient

$$F_m(t) \leq \int t^{\frac{2n}{\delta} - p - 1} dx' d\xi'$$

est convergente si $p > \frac{2n}{\delta}$.

Lemme B.5.1. *Soit A un opérateur du symbole $a \in \mathcal{S}^\mu_{\phi,\varphi}$. Alors A est dans la classe de Schatten $\mathcal{C}^p$ pour tout p tel que*

$$\int_{R^{2n}} \frac{1}{\mu^p(x,\xi)} dx d\xi < +\infty. \tag{B.3}$$

C

Calculs des intégrales $b_{j,k,l}^{(n)}$

C.1 Les formules

On suppose que $n \geq 3$ and $2j - q > 1$. On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{r^q}{(1+r^2)^j} dr = \frac{1}{2} B(\frac{q+1}{2}, j - \frac{q+1}{2}) \tag{C.1}$$

où

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Donc en utilisant les coordonnées polaires on obtient

$$b_j(n) = \frac{\pi^{n/2}\Gamma(j - n/2)}{\Gamma(j)}.$$

D'où on a

$$\begin{aligned} b_{j,1}(n) &= \tfrac{1}{n}(b_{j-1}(d) - b_j(n)), \\ b_{j,2}(n) &= B(5/2, j - d/2) b_j(n-1), \\ b_{j,1,1}(n) &= \tfrac{\pi}{8} B(5/2, j - \tfrac{n+3}{2}) b_j(n-2). \end{aligned}$$

D

Calculs numériques

D.1 Des exemples

Les calculs suivants ont été réalisés par Guy Moebs (ingénieur de recherche CNRS, Laboratoire Jean Leray de l'université de Nantes). La méthode utilisée est une adaptation de la méthode de Monte-Carlo, en tronquant dans un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ adapté au comportement du polynôme P. Pour chaque cas 100 simulations ont été réalisées avec un nombre d'évènements au moins égal à 10^9.

Ces calculs ont été réalisés par le centre de calcul intensif des Pays de la Loire (CCIPL).

Exemple D.1.1. *$n = 5$, polynôme* $P(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{x_j}^{\mathbf{4}} + \alpha \mathbf{x_1}^{\mathbf{2}} \mathbf{x_2}^{\mathbf{2}}$

α	$C_4(f)$
7	1 428
10	1 515
100	9 237
1000	235 115

Exemple D.1.2. $n = 7$, *polynôme* $P(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{x_j}^\mathbf{4} + \alpha \mathbf{x_1}^\mathbf{2}\mathbf{x_2}^\mathbf{2} + \beta \mathbf{x_3}^\mathbf{2}\mathbf{x_4}^\mathbf{2}$

α	β	$C_4(f)$
7	7	409
7	10	423
7	100	1 806
7	1000	39 646
10	10	434
10	100	1 705
10	1000	36 724
100	100	1 755
100	1000	19 587
1000	1000	18 270

Exemple D.1.3. $n = 5$, *polynôme* $P(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{x_j}^\mathbf{6} + \alpha \mathbf{x_1}^\mathbf{2}\mathbf{x_2}^\mathbf{4} + \beta \mathbf{x_3}^\mathbf{2}\mathbf{x_4}^\mathbf{4}$

(α, β)	$C_4(f)$
$(100, 10)$	11 732